PEDRO BRUNO TEODORO BRAUMANN

TEORIA DA MEDIDA E DA PROBABILIDADE

PARTE I | ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

TEORIA DA MEDIDA E DA PROBABILIDADE

PARTE I — ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

PEDRO BRUNO TEODORO BRAUMANN

TEORIA DA MEDIDA E DA PROBABILIDADE

PARTE I | ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN | LISBOA

Edição da
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN
Av. de Berna | Lisboa

Quando se optou pela publicação antecipada desta parte introdutória dum trabalho dedicado ao estudo simultâneo da Medida e da Probabilidade, havia de esperar que na mente do leitor atento assomasse a curiosidade de saber porque foi considerado preferível misturar duas teorias à nascença separadas e porque se começou por uma exposição sobre a Álgebra de Conjuntos, que é comparativamente desenvolvida e no decurso da qual não se depara com conclusões do foro nem da Medida nem da Probabilidade, salvo em raras ocasiões que se afiguram de capricho nomenclativo (ou talvez de intenção antecipativa).

Procuremos esclarecer, em primeira aproximação, qual é a visão de conjunto da temática a enfrentar.

Para já, esta «Teoria da Medida e da Probabilidade» destina-se a reestruturar uma publicação anterior, intitulada «Teoria da Medida com relevo para a Teoria da Probabilidade», distribuindo as respectivas matérias por Partes organizadas dum modo mais selectivo e acrescentando, em cada uma das Partes, desenvolvimentos de interesse imediato ou futuro sempre que tal se afigurar conveniente. Certamente o leitor notará que as soluções da maioria das questões postas emanam de conceitos e ideias em número comparativamente escasso, mas explorados por vias diversificadas. É aliás nesta estruturação de ramificação a partir dum substrato unificado que se esteiam o mérito e — porque não afirmá-lo — a eficiência da teoria moderna relativa à medida e à probabilidade.

Não vai longe o tempo em que o ramo de conhecimentos reservado às chamadas probabilidades — o «Cálculo das Proba-

bilidades» como então se dizia — recorria a processos empíricos (por vezes altamente engenhosos) que resolviam satisfatoriamente muitos problemas sugeridos pela prática, que se revelavam incertos (ou mesmo incoerentes) perante outros problemas mais delicados (algumas vezes decorrentes dos anteriores) e que falhavam sem apelo quando a conjuntura impunha ampliações significativas do quadro primitivamente traçado. Evidentemente, já não se estava na fase embrionária em que o curioso da matéria se limitava a procurar detectar, com preferência por via matemática, as manifestações duma «entidade» um tanto misteriosa (e até suspeita de paradoxal) cuja existência se aceitava sem discussão e a que se achava bem chamar «probabilidade». Mesmo assim havia necessidade premente duma doutrina rigorosa, delineada nos moldes usuais das teorias matemáticas, que partisse duma axiomática adequadamente seleccionada e que fosse capaz de atingir, por via dedutiva, conclusões suficientemente estruturadas para merecerem interesse intrínseco e suficientemente maleáveis para se prestarem a aplicações proveitosas.

Por outro lado, havia uma situação algo parecida com a relativa às probabilidades no ramo de conhecimentos reservado aos chamados integrais — o «Cálculo Integral» como se dizia de início — muito embora neste caso o fosso entre o empirismo e uma sólida teoria do integral já tivesse sido parcialmente aplanado por trabalhos de Cauchy, Riemann, Darboux, Stieltjes, Lebesgue, etc. Do lado das probabilidades (e mais geralmente das medidas) a correcção só começou a esboçar-se há sensivelmente meio século, através dos trabalhos de Kolmogorov, Gnedenko, Khintchine, Rényi, Carathéodory, etc.

O que é importante saber é que há uma chave comum não só para toda a problemática acima esboçada, como também para outros ramos do conhecimento matemático, entre os quais podemos citar o estudo das distribuições de massa na Mecânica Racional. Esta chave comum é a Teoria da Medida.

Pois bem, nesta publicação vamos mergulhar a Teoria da Probabilidade na Teoria da Medida, mais precisamente numa Teoria da Medida especialmente orientada, *em relação à qual a primeira teoria representa um caso particular interessante em si, importante para efeitos de aplicação e* interpenetrado *com o caso* *geral dum modo mais estreito do que poderia parecer à primeira vista. Em reforço dos argumentos já alegados, a via aqui enunciada afigura-se como a mais natural quando se pretende partir de noções simples dos pontos de vista* intuitivo e teórico *e se pretende chegar a um conhecimento razoavelmente* eficiente e avançado *com um dispêndio de esforços que se possa reputar como compensador. Ora, se é verdade que o caminho assinalado redunda em acréscimo de generalidade, também é verdade que um tal acréscimo não se traduz, de modo algum, em superfluidade porque a isso obstam diversas razões (em parte acima esboçadas). Assim:*

a) abrem-se as perspectivas exactas sobre conceitos que doutro modo ficariam obscurecidos por falta de enquadramento adequado;

b) certos temas de Probabilidade pura só podem ser deslindados com o auxílio de medidas que não são probabilidades;

c) muitos dos resultados obtidos convêm simultaneamente à Teoria da Probabilidade e a outras teorias na aparência bem diferentes.

Posto isso, torna-se oportuno acrescentar algumas palavras sobre a posição desta Parte introdutória. Sucede que nenhum *dos assuntos da Álgebra de Conjuntos aí encetados deixa de contribuir para o estudo subsequente da Medida e da Probabilidade, se bem que o grau de intervenção possa variar dum assunto para outro. Pretendeu-se, em primeiro lugar, que mais adiante não houvesse retornos às matérias desta parte que se tornassem demasiado frequentes e porventura desordenados, isto para não referir a conveniência de evitar omissões por subentendimentos de legitimidade porventura mal assegurada. Uma tal precaução não se afigurou dever ser exclusivista até ao ponto de obstar que certos assuntos da Álgebra de Conjuntos fossem desenvolvidos para além do seu papel precursor, por forma a melhorar as facilidades de interpretação, a proporcionar contexturas arredondadas e a tornar patentes conexões reveladoras.*

Para poder acompanhar este trabalho, o leitor precisa apenas dos conhecimentos prévios que costumam ser administrados nos *cursos de Análise Matemática dos dois primeiros anos universitários, havendo vantagem, embora não haja necessidade absoluta, em conhecer algo sobre a teoria do integral de Riemann-Stieltjes. Aliás, dar-se-ão as explicações apropriadas nos casos em que possa haver dúvidas no que concerne a preparação do leitor no nível aqui referido. É o que vai ser feito, por exemplo, a propósito das funções monotónicas e das funções de variação limitada e também a propósito dos sublimites extremos, em cada caso com uma variante que já inclui o «direito à cidadania» dos valores* $-\infty$ *e* $+\infty$.

Além dos conhecimentos de base supracitados, este trabalho foi redigido no duplo intento não só de lhe conferir autonomia suficiente para poder ser compreendido sem a necessidade de consultar outras obras, como também de despertar no estudioso a vontade de procurar informar-se sobre matérias que aqui foram omitidas. Pois, embora tenhamos desenvolvido certos assuntos um pouco para além do usual, estava completamente fora de causa a elaboração dum compêndio universal onde figurasse tudo quanto pudesse interessar à Medida e à Probabilidade.

As diversas Partes deste trabalho estão divididas em capítulos numerados em romano e eventualmente em subcapítulos ou secções cada um dos quais compreende parágrafos, estes munidos de numeração árabe ininterrupta adentro da respectiva Parte e subdivididos em números sucessivos com numeração que recomeça quando se muda dum parágrafo para o seguinte. Exemplo relativo à Parte I: o n.º 2 do § 24, pertencente à Secção A do Capítulo III, é posterior ao n.º 4 do § 20, pertencente à Secção B do Capítulo II. Qualquer uma das Partes compreende fórmulas (também denominadas relações), exemplos e exercícios que são afectados, em cada um dos três casos, duma numeração árabe consecutiva.

No que respeita aos exemplos, eles consistem em suplementos à teoria e também em casos particulares: por cima dos quais se pode passar sem inconveniente apenas *quando se pretende um simples apanhado da respectiva matéria; que* em geral *são susceptíveis de utilização posterior sem ser somente para efeitos de exemplificação; cujas justificações são* sempre *devidamente elaboradas a fim de poupar ao leitor quaisquer dificuldades adicionais. Por outras palavras mais resumidas: O exemplo da ocasião é convertível numa fase da teoria.*

No que respeita aos exercícios, o leitor pode contorná-los sem *qualquer quebra de continuidade no encadeamento das matérias. Todavia, será útil resolvê-los, se não houver outra razão para testar o grau de compreensão alcançado. Há-os de vários géneros: meras perguntas de algibeira ou de inteligência; aplicações da teoria a casos concretos ou numéricos; aditamentos teóricos que não são usados mais adiante a não ser em novos exercícios.*

Segue uma ideia sumária do conteúdo da Parte I.

A Secção A do Capítulo I começa pelas generalidades indispensáveis; prossegue com o estudo das seis principais operações relativas a conjuntos contidos num espaço comum e de certas associações constituídas por tais operações. Para chegar às conclusões pretendidas, recorre-se preponderantemente ao uso de indicatrizes, *uso este que pode complicar as coisas ligeira e acidentalmente na dedução das propriedades mais imediatas, mas que é de longe o processo mais eficiente para a dedução das propriedades mais evoluídas. Os dois assuntos finais da Secção A são primeiro a, digamos, «rivalidade interna» entre os dois métodos principais para converter uma união numa soma e depois o estudo dos sublimites extremos duma sucessão formada por conjuntos, esse à custa dos sublimites homónimos das correspondentes indicatrizes.*

A Secção B do Capítulo I é dedicada às principais operações relativas a conjuntos tirados de espaços diferentes. Aí se torna ainda mais acentuada a vantagem do recurso às indicatrizes sobre os processos de dedução directa das propriedades, pelo menos nos casos (nada raros) em que esses processos obrigariam a verdadeiros malabarismos estilísticos.

A Secção inicia-se pela operação de restrição a um subespaço, a qual não se reduz a uma formalidade mais ou menos curiosa: já que mais adiante é ela que permite esclarecer uma faceta importante da mensurabilidade da composição de duas funções, é ela que permite substituir em certas ocasiões anéis ($-\sigma$) adventícios por álgebras ($-\sigma$) mais favoráveis e é ela que faculta um acesso cómodo às chamadas medidas e probabilidades condicionais.

Segue o estudo da multiplicação (cartesiana) de conjuntos onde merecem atenção: o corolário 6', que garante a unicidade da factorização dum conjunto-produto não-vazio; a aceitação da associatividade da operação; a recusa da sua comutatividade; a prova da sua permutabilidade com a intersecção em determinadas condições que são do foro do parentesco entre as duas operações, mais adiante reconhecido como sendo bastante estreito embora insuficiente para declarar uma identidade inexistente. Um caso particular da multiplicação (cartesiana) conduz aos chamados espaços reais, com ocasionais possibilidades de interpretação geométrica cómoda, em relação aos quais a distinção adequada entre o conjunto ∞ *e* coordenadas *infinitas com sinal declarado se repercute mais adiante no estudo dos borelianos, das funções mensuráveis e das respectivas implicações medidistas. Sob a observância da falta de comutatividade, acrescenta-se a extensão da multiplicação (cartesiana) ao caso de factores constituindo uma infinidade transnumerável.*

O estudo prossegue com a operação de projecção, tendo em conta a sua eventual interpretação geométrica e sobretudo o caso particular importantíssimo da marginação, *caso este que, por um lado, se esteia na noção de cilindro e respectiva base e que, por outro lado, é fundamental para uma parte considerável da matéria subsequente. Chamamos a atenção especial do leitor para a igualdade entre uma intersecção de cilindros e o produto das respectivas bases, propriedade essa que vem em apoio da interpretação da multiplicação (cartesiana) como intersecção externa dos respectivos factores (ou seja duma interpretação que pode adaptar-se ao caso das uniões), mas que não estabelece de modo nenhum a identidade com a operação interna homóloga.*

A Secção termina com o estudo da operação de corte feito num conjunto por um ponto, uma operação que não é inteiramente independente das anteriores e que vem a ter o seu uso principal a propósito das funções mensuráveis e dos seus integrais, sem esquecer a sua aplicação para efeitos de construção de produtos de medidas.

A Secção A do Capítulo II começa por generalidades relativas a classes de conjuntos contidos num espaço Ω ou seja relativas à passagem (por vezes subentendida) de Ω para o novo espaço 2^{Ω}. Passam-se em revista as classes mais importantes (todas estabi-

lizadas), entre as quais merecem destaque os semianéis (eventualmente formados por intervalos), as álgebras e as álgebras — σ, estas não só associáveis aos respectivos espaços em pares ordenados denominados espaços mensuráveis, como também ampliáveis a álgebras — σ completivas, entre as quais figuram os suportes das futuras medidas completivas.

Segue o estudo geral da classe obtida por intersecção de todas as classes estabilizadas de certo tipo com a propriedade de conterem uma classe dada, estudo esse que em seguida se aplica preponderantemente ao caso da álgebra — σ gerada *por uma classe dada. Aí introduzem-se algumas fórmulas ou relações que permitem sistematizar parte da exposição posterior, fugindo assim a complicações estilísticas doutro modo inevitáveis.*

O estudo prossegue com as decomposições aditivas dum espaço mensurável (Ω, A) *que permitem lançar alguma luz sobre a estruturação dum tal espaço e, eventualmente, sobre a construção de A, uma coisa e outra mesmo no caso de se dispor apenas duma subclasse de A que seja própria e geradora. A Secção termina com o estudo da recta de Borel nas versões primitiva e alargada, dando-se ênfase às classes geradoras de cada versão e ao seu relacionamento recíproco, este facilitado pela propriedade de serem borelianos todos os conjuntos contidos em* ∞ .

A Secção B do Capítulo II começa pelas operações de restrição, corte, projecção e marginação duma classe K, com incidência específica no caso de K ser uma álgebra — σ, caso este em que se examinam as decomposições dos espaços mensuráveis acompanhantes. O estudo da marginação de classes esteia-se na noção de cilindro, merecendo especial atenção a propriedade expressa pela fórmula 57) ou seja a permutabilidade entre a marginação duma classe e a geração duma álgebra — σ no caso de se partir duma classe formada por cilindros com bases todas tomadas no mesmo espaço.

Segue o estudo da multiplicação transposta ou seja de classes dadas, que não é senão o estudo da geração duma classe estabilizada de certo tipo a partir da classe dos produtos formados com conjuntos pertencentes às classes dadas. Esse estudo resulta particularmente simples quando os factores forem semianéis em número finito. — Caso se trabalhe exclusivamente com álgebras — σ, a *multiplicação transposta pode ser extrapolada para a multiplicação de espaços mensuráveis, valendo a pena relacionar as respectivas decomposições. Caso se trabalhe com factores arbitrários e se pretenda que o produto seja uma álgebra — σ, levantam-se dois problemas importantes, o da associatividade da multiplicação e o da substituição de cada factor pela álgebra — σ que ele gera. Um caso particular interessante é o da multiplicação de álgebras formando uma sequência ou uma sucessão.*

O estudo prossegue com os cortes e com as bases de produtos de espaços mensuráveis, merecendo especial atenção a propriedade segundo a qual um conjunto-produto não-vazio é mensurável se e só se forem mensuráveis todos os seus factores. O confronto entre uma álgebra — σ A tirada dum espaço-produto e o produto das bases de A nos espaços-factores oferece compensações, entre as quais se destaca a caracterização e a unicidade da factorização duma álgebra — σ em álgebras — σ. Aí os cilindros desempenham mais uma vez um papel relevante. O caso dum espaço-produto com factores formando uma colecção intransnumerável proporciona facilidades adicionais dignas de registo.

A Secção termina com o estudo dos espaços de Borel multidimensionais, das respectivas classes geradoras e do relacionamento entre as versões primitiva e alargada.

Dada a índole da teoria das funções mensuráveis, pareceu preferível fazer dela um capítulo da Álgebra de Conjuntos a metê-la, extemporaneamente, como preâmbulo dos integrais.

A Secção A do Capítulo III destina-se ao estudo genérico das funções mensuráveis, começando por generalidades sobre funções de ligação entre espaços as quais, quando interpretadas como transformações de conjuntos, admitem funções inversas respeitadoras das principais operações internas e admitem também representações compatíveis, entre as quais se destacam as canónicas e as paralelas (as últimas na hipótese da presença simultânea de duas funções). Um caso particular importante é o duma função directa elementar ou, ainda mais particularmente, o duma função directa simples.

As breves considerações sobre classes induzidas preparam o enquadramento correcto das duas definições de função mensurável (a ligar dois espaços mensuráveis), cuja equivalência se prova em *seguida (juntamente com algumas propriedades acompanhantes). Chama-se a atenção para a equivalência entre a definição de mensurabilidade e qualquer um dos seus extratos correspondentes a uma classe geradora da álgebra — σ de chegada.*

Segue um estudo sobre a composição de duas funções, primeiro no caso geral e depois no caso da mensurabilidade (nem sempre coincidente com a mensurabilidade simultânea das funções componentes). A este propósito, convém distinguir entre, por um lado, a mensurabilidade duma função mensurável com respeito à restrição do espaço mensurável de chegada ao contradomínio E da função e, por outro lado, a mensurabilidade da restrição duma função mensurável a um conjunto K contido no espaço de saída, a primeira assegurada quer E seja mensurável quer não o seja e a outra assegurada apenas no caso de K ser mensurável. Merecem atenção não só as várias condições necessárias e suficientes para a mensurabilidade duma função elementar, como também as relações entre a mensurabilidade duma função e a duma representação sua.

O estudo prossegue com o corte feito numa função em geral e numa função mensurável por um ponto pertencente a um produto parcial do espaço de saída (suposto igual a um espaço-produto). Também se considera a marginação duma função em geral e duma função mensurável com respeito a um produto parcial do espaço de chegada (suposto igual a um espaço-produto). Merece atenção especial o caso dum espaço mensurável de chegada igual ao produto duma sequência ou duma sucessão de espaços mensuráveis, caso esse em que a função original é mensurável se e só se forem mensuráveis todas as suas coordenadas. Outro caso especial interessante é o da composição mensurável dum número finito de funções elementares e mensuráveis com outra função, menos condicionada do que possa parecer à primeira vista, caso esse que no parágrafo subsequente permite aceitar sem surpresa um teorema bem conhecido sobre a mensurabilidade da composição dum número finito de funções elementares e borelianas com qualquer *função cujo contradomínio esteja contido nalguma recta real.*

A Secção termina com a introdução das funções mensuráveis cujo contradomínio esteja contido nalgum espaço de Borel (vulgar ou alargado). No caso dessas funções juntam-se diversas peculia-

ridades notáveis cuja ocorrência benéfica simplifica consideravelmente a teoria geral, mas cuja aceitação a priori *obscurece consideravelmente a essência da mensurabilidade (de funções). Agora toda a função mensurável passa a ter representação canónica mensurável, as condições para a mensurabilidade duma função elementar tornam-se particularmente cómodas e há facilidade em conseguir representações paralelas e mensuráveis para duas funções mensuráveis. Os casos particulares mais importantes são, por ordem crescente de acessibilidade, as sucessões borelianas, os vectores borelianos e as funções borelianas; estes casos proporcionam novas simplificações teóricas e o último caso pode ser conduzido por forma a tornar irrelevante a diferença entre as versões primitiva e alargada da recta de Borel.*

A Secção B do Capítulo III destina-se ao estudo das funções borelianas: começa por generalidades sobre funções reais e põe o problema das indeterminações relativas a tais funções duma forma ajustada aos fins em vista. Retomam-se as funções e.b. (elementares e borelianas) e s.b. (simples e borelianas), examina-se a transmissão do carácter e.b. ou s.b. dumas funções para outras e, por fim, estabelece-se o carácter mensurável dos conjuntos de indeterminação incidentes.

Segue o estudo das funções borelianas, na qualidade ou de limites uniformes de funções e.b. ou de limites vulgares de funções s.b., umas e outras constituídas em sucessão, estudo esse conduzido por forma que as funções de aproximação não interfiram com eventuais indeterminações e que a tendência possa ser monotónica sempre que a função-limite for não-negativa ou não-positiva. Os supremos, os ínfimos e os sublimites extremos são apresentados «ab initio» *por uma forma adequada a questões de mensurabilidade, concluindo-se que é boreliano todo o supremo e todo o ínfimo duma sequência ou duma sucessão formada por funções borelianas, com as decorrentes implicações para os sublimites extremos de sucessões formadas por funções borelianas. Estas sucessões são tais que é mensurável o conjunto dos pontos onde há limite, além de estarem em relação com a transmissão do carácter boreliano dumas funções para outras.*

Um primeiro relacionamento com a Análise clássica revela que é boreliana toda a função real e contínua (em sentido lato) e que é boreliana, mais geralmente, toda a função de Baire tomada *um vector boreliano. Prosseguindo no relacionamento referido, reconhece-se que é boreliana toda a função real dum número finito de variáveis reais que, por um lado, se reduza a uma constante sobre um conjunto de Borel e que, por outro lado, seja contínua em sentido lato ou dalguma classe de Baire sobre o complemento desse conjunto. Exemplifica-se com os integrais de Riemann indefinidos e eventualmente múltiplos.*

O estudo continua com o relacionamento entre a borelianidade e a (semi)derivação, a monotonicidade e a variação limitada. Exemplifica-se com os integrais (simples e) indefinidos de Riemann-Stieltjes.

A Secção termina com o estudo das funções borelianas complexas, conduzido por forma que se admitem números complexos infinitos. Para além de generalidades relativas às partes real e imaginária, ao módulo e à amplitude, adaptam-se vários resultados que generalizam outros anteriormente deduzidos para o caso das funções borelianas reais. Por fim, alerta-se o leitor para a situação decepcionante que adviria se todo o conjunto formado por números reais e finitos fosse um conjunto de Borel linear.

Aveiro, 15 de Setembro de 1983.

O manuscrito deste volume foi redigido em 1982/3 no decurso do ano sabático concedido ao autor, então em comissão de serviço na Universidade de Aveiro, com o apoio da Reitoria, do Conselho Científico e do Departamento de Matemática. A dactilografia foi oferta do Centro de Estatística e Aplicações e do Departamento de Estatística e Investigação Operacional, ambos da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, com o apoio do primeiro Presidente do Departamento e do actual Director do Centro. Por fim, o meu colega Professor Doutor Dinis Pestana propôs diversos arranjos em benefício da comodidade do leitor. A todos eles o autor deseja exprimir os seus agradecimentos.

21 de Dezembro de 1984.

Pedro Bruno Teodoro Braumann

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS MAIS IMPORTANTES

símbolo	*significado*
ε	pertence
$\bar{\varepsilon}$	não pertence
O	conjunto vazio
$\leqslant$	menor ou igual
$\geqslant$	maior ou igual
$\preccurlyeq$	contido em
$\succcurlyeq$	contém
$\uparrow$	cresce
$\downarrow$	decresce
I, por exemplo I_A	indicatriz, por exemplo indicatriz de A
$^-$, por exemplo A^-	complementação, por exemplo de A
$\Rightarrow$	implica
$\rightleftarrows$	implica e é implicada por
$-$	subtracção de números *e* de conjuntos
Δ	subtracção simétrica
$\wedge$	intersecção
$\vee$	união
inf	ínfimo
sup	supremo
$\dot{+}$	adição de conjuntos
$\dot{\Sigma}$	somatório de conjuntos
$\underline{\lim}$	sublimite mínimo
$\overline{\lim}$	sublimite máximo
/	dado um conjunto ou restrição a um conjunto; também corte feito por um ponto
$\cdot$ ou Π	multiplicação de números

símbolo	*significado*
$\times$	multiplicação de conjuntos
$\dot{\times}$	multiplicação transposta
X	espaço real
$\overline{\text{X}}$	espaço real alargado
∞	infinito como conjunto
, por exemplo A	projecção, por exemplo projecção de A
, por exemplo C	marginação, por exemplo conjunto marginal do cilindro C
$\dot{V}$	união externa
2^{Ω}	classe formada por todos os conjuntos de Ω
σ	designativo da aditividade generalizada ou da estabilização com respeito à união intransnumerável
°, por exemplo G°	geração de classes, por exemplo classe gerada por G
B	álgebra de Borel
$\overline{B}$	álgebra de Borel alargada
e. m.	elementar e mensurável
s. m.	simples e mensurável
e. b.	elementar e boreliano
s. b.	simples e boreliano
lim	limite de funções ou de conjuntos
l.i.m.	limite definidor de integrais clássicos

Aviso ao leitor. Para tornar mais acessível a leitura de certas passagens do texto, afigurou-se conveniente recorrer a índices e subíndices ou índices da ordem 2 e, por vezes, a índices da ordem 3. Nalguns desses casos, a composição tipográfica obrigou a desrespeitar ligeiramente o igual distanciamento entre símbolos consecutivos.

PARTE I

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

CAPÍTULO I

OPERAÇÕES A INCIDIR SOBRE CONJUNTOS

OPERAÇÕES INTERNAS

§ 1 — GENERALIDADES SOBRE CONJUNTOS EXTRAÍDOS DE UM ESPAÇO DADO

1. Espaço ou universo

Quando se procede à elaboração duma teoria matemática, é forçoso, quer haja a intenção de aplicá-la ulteriormente a problemas práticos quer tal intenção não esteja nos nossos propósitos, dizíamos é forçoso tomar para ponto de partida noções primárias adequadas que se consideram como óbvias na situação incidente e que, por isso, não se sujeitam a nenhuma tentativa de dissecação.

No caso presente, o nosso objectivo é construir uma teoria geral da medida, atribuindo um papel relevante ao caso particular da teoria da probabilidade. Para este efeito, serve-nos de esteio a noção primária de *conjunto não-vazio*, quer dizer com elementos, que tenha sido fixado previamente. Como pretendemos estruturar um tal conjunto, por vezes denominado *universo*, para os fins específicos que temos em vista, não pode parecer mal se anteciparmos o resultado da futura desamorfização chamando, desde já, *espaço* ao conjunto fixado.

Nesta conformidade, suponhamos que é dado o espaço Ω. Quanto aos elementos ω de Ω, vamos designá-los também por *pontos*, isto mesmo que não sejam pontos na acepção corrente da palavra. Utilizaremos o símbolo $\Omega(\omega)$ para referir o espaço Ω cujo ponto genérico é ω.

2. Pontos e conjuntos

Dado o espaço $\Omega(\omega)$, podemos separar dele *conjuntos* formados por pontos ω, o conjunto Ω se aproveitarmos todos os pontos ω possíveis e, caso Ω tenha mais do que um ponto, outros conjuntos se deixarmos de aproveitar todos os pontos ω possíveis. A fim de obviar que muitos dos resultados a estabelecer mais adiante fiquem sujeitos a excepções de descrição enfadonha, torna-se altamente aconselhável que se introduza desde já a convenção seguinte: Seja qual for o espaço Ω, existe nele *um e um só* conjunto desprovido de pontos ω, conjunto esse que vamos representar pelo símbolo O e a que vamos chamar *conjunto vazio.* Nesta conformidade, classificaremos de *não-vazio* todo o conjunto que esteja provido de pontos ω.

Seja A um conjunto ou vazio ou formado por pontos ω. Chamamos ao conjunto A *singular* ou *elementar* se e só se ele for formado por um único ponto. Em todos os demais casos, chamamos ao conjunto A *não-singular* ou *não-elementar.* Assim O é um conjunto não-elementar.

Quando o ponto ω fizer parte de A, escreveremos simbolicamente $\omega \varepsilon A$ e diremos que ω *pertence a A* ou *está situado em A;* por vezes, diremos também que o conjunto A ***abrange*** **ou** ***compreende*** o ponto ω. Para negar a afirmação correspondente ao símbolo $\omega \varepsilon A$, podemos escrever $\omega \bar{\varepsilon} A$ e dizer que ω não pertence a A, etc. Imediatamente se reconhece que, seja qual for ω, vale sempre $\omega \varepsilon \Omega$ e $\omega \bar{\varepsilon} O$.

Recorremos ao simbolismo $\{\omega', \omega'', \omega''', \ldots\}$ para assinalar o conjunto A formado pelos pontos $\omega', \omega'', \omega''', \ldots$, todos pertencentes a Ω. Nesta conformidade, a relação $\omega \varepsilon \{\omega\}$ refere muito simplesmente que o ponto ω está situado no conjunto elementar formado pelo único ponto ω.

Recorremos ao simbolismo $\{\omega$ sujeito a uma certa relação$\}$ para assinalar o conjunto A formado por todos os pontos ω que satisfaçam à relação em causa. Por exemplo, se o espaço Ω se compuser de todos os números racionais, então $\{0 < \omega \leqslant 2\}$ refere o conjunto dos números racionais e positivos que não excedam 2. Note-se que o nosso simbolismo conduz ao conjunto O se e só se não houver nenhum ponto ω que satisfaça à relação incidente.

3. **Primeiras relações entre conjuntos**

Escolhidos dois conjuntos A e B, ambos existentes no espaço $\Omega(\omega)$, eles dizem-se *disjuntos* (entre si) se e só se não houver nenhum ponto ω situado simultaneamente em A e em B. É o que sucede, em particular, quando um dos conjuntos for vazio (quer o outro seja vazio quer seja não-vazio).

Em seguida, *subentendemos que A e B designam sempre conjuntos existentes em* $\Omega(\omega)$. Supondo que A e B são por ora conjuntos não-vazios, pode dar-se o caso de todo o $\omega \varepsilon A$ ser tal que $\omega \varepsilon B$. Neste caso escrevemos indistintamente ou $A \leqslant B$ ou $B \geqslant A$, simbolismo esse que mantemos sempre que A for vazio (quer B seja vazio quer B seja não-vazio) e que não mantemos nos casos remanescentes. A expressão $A \leqslant B$ lê-se ou *A está contida em B* ou *A é subconjunto de B* e a expressão $B \geqslant A$ lê-se ou *B contém A* ou *B é sobreconjunto de A.*

Claro que o conjunto O resulta em subconjunto de qualquer conjunto, que o espaço Ω resulta em sobreconjunto de qualquer conjunto e que, seja qual for o conjunto A, vale simultaneamente $A \leqslant A$ e $A \geqslant A$ (*propriedade reflexiva* correspondente aos símbolos $\leqslant$ e $\geqslant$).

Um caso particular importante da relação $A \leqslant B$, equivalente a $B \geqslant A$, é o caso em que há pontos $\omega \varepsilon B$ tais que $\omega \bar{\varepsilon} A$. Se quisermos evitar um simbolismo especial para este caso, podemos distinguir escrevendo, na primeira alternativa, ou A *está propriamente contido em* B ou A *é subconjunto próprio de* B e escrevendo, na outra alternativa, ou B *contém propriamente* A ou B *e sobreconjunto próprio de* A. Nesta conformidade, qualquer conjunto classifica-se como *subconjunto impróprio* de si mesmo e como *sobreconjunto impróprio* de si mesmo.

Escrevemos $A = B$ e lemos *A é igual a B* se e só se tiver lugar a seguinte condição: Escolhido arbitrariamente um ponto $\omega \varepsilon \Omega$, ou vale simultaneamente $\omega \varepsilon A$ e $\omega \varepsilon B$ ou vale simultaneamente $\omega \bar{\varepsilon} A$ e $\omega \bar{\varepsilon} B$. Em todos os demais casos, escrevemos $A \neq B$ e lemos *A é diferente de B.*

Posto isto, vale o seguinte

Teorema 1:«Tem-se a igualdade $A = B$ se e só se valerem simultaneamente as relações $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$.»

Demonstração. Pondo de lado situações de solução imediata, podemos supor que nem A nem B é vazio. Então, caso se tenha $A=B$, a relação $\omega \varepsilon A$ obriga a $\omega \varepsilon B$ e a relação $\omega \varepsilon B$ obriga a $\omega \varepsilon A$, pelo que vale simultaneamente $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$. Por outro lado, caso se tenha essa dupla relação, os pontos ω pertencentes a um dos conjuntos terão de pertencer ao outro e, consequentemente, os pontos ω não pertencentes a um dos conjuntos não podem pertencer ao outro, c. q. d.

Observação. O teorema 1 é construtivo no sentido de permitir verificar a relação $A = B$ através da verificação simultânea das relações $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$. Este processo de verificação é teoricamente perfeito, mas pode conduzir a dificuldades práticas por vezes insuperáveis (dependendo a situação em alto grau das formas como se apresentam os conjuntos A e B).

Quer recorramos à definição de *igualdade entre conjuntos* quer recorramos à condição necessária e suficiente do teorema 1, imediatamente se reconhece que $A=A$ (*propriedade reflexiva* da igualdade) e que $A=B$ implica $B=A$ (*propriedade simétrica* da igualdade). Por outro lado, se falhar uma das relações $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$, haverá *desigualdade* entre os conjuntos A e B. Devemos acrescentar que nada impede que ambas as relações possam falhar; é o que sucede, por exemplo, quando Ω for o espaço formado por todos os números naturais, quando A for o conjunto dos naturais pares e quando B for o conjunto dos naturais que não excedam 20, caso este em que A e B nem sequer são disjuntos (entre si).

4. **Famílias de conjuntos**

Seja $T(t)$ um espaço T de ponto genérico t e suponhamos que cada $t \varepsilon T$ corresponde um conjunto $A_t \leqslant \Omega$, onde Ω é abreviatura para o espaço original $\Omega(\omega)$. Nesta conformidade, diremos que T é uma *família de índices* t (que pode ser finita ou infinita numerável ou infinita transnumerável) à qual corresponderá a *família de conjuntos* A_t, todos contidos em Ω (e não necessariamente diferentes dois a dois).

Caso os índices t admissíveis percorram uma sequência de $N<+\infty$ números naturais dispostos por ordem crescente, os correspondentes conjuntos A_n, com n em lugar de t, constituem-se, por sua vez, em *sequência.* Por outro lado, caso os índices t admissíveis percorram uma sucessão de números naturais dispostos por ordem crescente, os correspondentes conjuntos A_n, ainda com n em lugar de t, constituem-se, por sua vez, em *sucessão.*

Sejam então $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ (numeração consecutiva) os elementos duma sequência ou duma sucessão de conjuntos contidos em Ω. Uma tal sequência ou sucessão diz-se *crescente* ou *ascendente* e representa-se simbolicamente por $A_n\uparrow$ se e só se tivermos $A_n \leqslant A_{n+1}$ para todo o valor admissível de $n+1$. Semelhantemente, a sequência ou sucessão diz-se *decrescente* ou *descendente* e representa-se simbolicamente por $A_n\downarrow$ se e só se tivermos $A_n \geqslant A_{n+1}$ para todo o valor admissível de $n+1$. Por fim, a sequência ou sucessão diz-se *monótona* ou, talvez melhor, *monotónica* se e só se valer uma das relações $A_n\uparrow$ ou $A_n\downarrow$.

Exercício 1. Caracterize as sequências e as sucessões que são simultaneamente crescentes e decrescentes.

§ 2 — GENERALIDADES SOBRE (FUNÇÕES) INDICATRIZES

1. A noção de indicatriz

Dado um espaço $\Omega(\omega)$, há muitos modos de introduzir uma função f que faça corresponder a cada $\omega \varepsilon \Omega$ número $f(\omega)$ (não necessariamente finito nem necessariamente real). Uma tal função tem por domínio o espaço Ω e por contradomínio algum conjunto formado por números; denomina-se *função indicatriz,* abreviadamente **indicatriz,** se e só se o contradomínio estiver contido no conjunto formado pelos números 0 e 1. Há quem diga função característica em lugar de (função) indicatriz, mas não nos convém proceder desse modo porque mais adiante vai aparecer-nos uma noção de função característica completamente diferente e pretendemos evitar confusões terminológicas.

Em face da definição dada, uma indicatriz digamos $I(\omega)$ ou degenera na constante 0 ou degenera na constante 1 ou assume os dois valores 0 e 1. Se representarmos abreviadamente por *a* uma função degenerada na constante numérica *a,* então: o primeiro caso referido consubstancia-se ou na identidade $I(\omega) \equiv 0$ ($\equiv$ significa $=$ para qualquer ω) ou na igualdade entre funções $I=0$; o segundo caso consubstancia-se ou na identidade $I(\omega) \equiv 1$ ou na igualdade entre funções $I=1$. Mais geralmente, se tivermos duas indicatrizes, digamos $I(\omega)$ e $J(\omega)$, a sua identificação consubstancia-se ou através da identidade $I(\omega) \equiv J(\omega)$ ou através da igualdade entre funções $I=J$.

Posto isto, temos o

Teorema 2: «Escolhidos arbitrariamente um número finito $\alpha > 0$ e uma indicatriz I definida num certo espaço, verifica-se sempre a igualdade entre funções $I^\alpha = I$.»

Demonstração. Óbvio em face de $0^\alpha = 0$ e $1^\alpha = 1$.

2. Correspondência entre indicatrizes e conjuntos

Escolhida arbitrariamente uma indicatriz I de domínio Ω, podemos fazer corresponder o conjunto $A_I \leqslant \Omega$, formado pelos pontos em que $\dot{I}$ assume o valor 1 e somente por esses pontos. Por outro lado, escolhido arbitrariamente um conjunto $B \leqslant \Omega$, podemos fazer corresponder a indicatriz I_B que assume o valor 1 nos pontos $\omega \varepsilon B$ e que assume o valor 0 nos pontos $\omega \bar{\varepsilon} B$. No tipo de correspondências nos dois sentidos que acabamos de introduzir, a indicatriz correspondente ao conjunto A_I será a indicatriz primitiva I (e o conjunto correspondente à indicatriz I_B será o conjunto primitivo B). Fica assim instituída uma *correspondência biunívoca entre os conjuntos contidos em Ω e as indicatrizes de domínio Ω que é recíproca,* quer dizer em que o correspondente do correspondente é o ente original. Tal correspondência afigura-se muito prometedora, sobretudo se as relações principais entre conjuntos contidos em Ω, por norma de tratamento directo algo complicado, forem acompanhadas por relações homólogas entre indicatrizes de domínio Ω, por norma de tratamento mais acessível. Eis uma situação que vai ocorrer com muita frequência na continuação do nosso estudo.

Para já, temos o

Teorema 3: «Há igualdade entre dois conjuntos A e B, ambos contidos no espaço dado, se e só se as correspondentes indicatrizes I_A e I_B satisfizerem à igualdade entre funções $I_A = I_B$.»

Demonstração. Óbvio em face das considerações que precedem o enunciado.

Observação. A verificação da igualdade $A=B$ facultada pelo teorema 3 é, em princípio, mais simples do que a verificação homóloga facultada pelo teorema 1. Todavia nada impede que ocorram excepções ao princípio geral aqui aventado.

Exemplo 1. Se juntarmos aos conjuntos A e B do teorema 3 um terceiro conjunto $C \leqslant \Omega$ com indicatriz (correspondente) I_C, então as hipóteses $A=B$ e $B=C$ implicam primeiro $I_A=I_B$ e $I_B = I_C$, em seguida $I_A = I_C$ e, por fim, $A = C$. Fica assim estabelecida a *propriedade transitiva da igualdade entre conjuntos* (contidos em Ω). Claro que esta propriedade também se pode justificar, até com muita facilidade, por outras vias.

3. Desigualdades entre indicatrizes

Dadas duas indicatrizes de domínio Ω, sejam I e J, convencionemos escrever $I \leqslant J$ (ou equivalentemente $J \geqslant I$) se e só se a desigualdade $I(\omega) \leqslant J(\omega)$ for válida para todo o $\omega \varepsilon \Omega$.

Posto isso, temos o

Teorema 4: «Os dois conjuntos A e B, ambos contidos no espaço dado, sujeitam-se à relação $A \leqslant B$ (ou equivalentemente $B \geqslant A$) se e só se as correspondentes indicatrizes I_A e I_B se sujeitarem à desigualdade entre funções $I_A \leqslant I_B$.»

Demonstração. Começemos por notar que $I_A(\omega) \leqslant I_B(\omega)$ falha nos pontos ω em que I_A valer 1 e I_B valer 0 e não falha em quaisquer outros pontos ω, pelo que $I_A \leqslant I_B$ é equivalente à inexistência de pontos ω que confiram o valor 1 a I_A e o valor 0 a I_B. Ora, se $A \leqslant B$, então $\omega \varepsilon A$ implica $\omega \varepsilon B$ pelo que fica assegurada a inexistência que acabamos de referir. Inversamente, assegurada essa inexistência, ou A é vazio ou A é não-vazio e $\omega \varepsilon A$ implica $\omega \varepsilon B$; em qualquer caso, resulta $A \leqslant B$, c. q. d.

Exemplo 2. Se juntarmos aos conjuntos A e B do teorema 4 um terceiro conjunto $C \leqslant \Omega$ com indicatriz I_C, então as hipóteses $A \leqslant B$ e $B \leqslant C$ implicam primeiro $I_A \leqslant I_B$ e $I_B \leqslant I_C$, em seguida $I_A \leqslant I_C$ e, por fim, $A \leqslant C$. Fica assim estabelecida a *propriedade transitiva* *da relação* $\leqslant$ para conjuntos (contidos em Ω). Obviamente, as hipóteses podem ser escritas sob a forma $C \geqslant B$ e $B \geqslant A$ e a conclusão pode ser escrita sob a forma $C \geqslant A$, pelo que resulta também a *propriedade transitiva da relação* $\geqslant$. Claro que as duas propriedades transitivas precedentes também se podem justificar, até com muita facilidade, por outras vias.

Exercício 2. Prove que $A \leqslant B$ e $B \leqslant C$ implica A propriamente contido em C se e só se ou A propriamente contido em B ou B propriamente contido em C ; prove também que se verifica a situação paralela obtida formalmente pela troca dos papéis entre subconjuntos e sobreconjuntos. Em particular, deduza a propriedade transitiva para cada uma das relações «propriamente contido em» e «contém propriamente».

Exercício 3. Use as teses dos teoremas 1 e 4 para redemonstrar o teorema 3.

4. Indicatrizes de conjuntos disjuntos, do vazio e do espaço

Vamos acrescentar um teorema e duas propriedades relativos a conjuntos contidos em Ω e/ou a indicatrizes de domínio Ω.

Teorema 5: «Para que os conjuntos A e B, ambos contidos no espaço dado, sejam disjuntos (entre si) é condição necessária e suficiente que as correspondentes indicatrizes I_A e I_B se sujeitem à igualdade entre funções $I_A \,.\, I_B = 0$.»

Demonstração. Com efeito, sabemos que a disjunção entre A e B é equivalente à inexistência de pontos ω que pertençam simultaneamente a A e a B, por sua vez equivalente à inexistência de pontos ω tais que $I_A(\omega) = 1 = I_B(\omega)$.

1.ª propriedade: «Caso $A \leqslant \Omega$ e $B \leqslant \Omega$ sejam disjuntos e caso se tenha $A' \leqslant A$ e $B' \leqslant B$, os subconjuntos A' e B' também resultam disjuntos.» — Com efeito, sendo $I_{A'}$ a indicatriz de A' e $I_{B'}$ a indicatriz de B', temos, por hipótese, $I_{A'} \leqslant I_A$, $I_{B'} \leqslant I_B$ e $I_A I_B = 0$. Logo $I_{A'} \cdot I_{B'} = 0$ e a tese segue. Claro que a tese também se pode obter por via mais directa.

2.ª propriedade: «Valem as fórmulas

$$I_O(\omega) \equiv 0 \text{ ou } I_O = 0 \tag{1}$$

e

$$I_\Omega(\omega) \equiv 1 \text{ ou } I_\Omega = 1, \tag{2}$$

onde I_O e I_Ω são as indicatrizes respectivamente do conjunto O e do conjunto Ω.» — A fórmula 1) justifica-se pelo facto de qualquer ponto $\omega \bar{\varepsilon} O$ e a fórmula 2) justifica-se pelo facto de qualquer ponto $\omega \varepsilon \Omega$.

Chegados a este ponto, chamamos a atenção para a pormenorização das considerações até agora desenvolvidas, propositada porque desejamos dispor duma base sólida para o estudo subsequente das *operações internas* sobre conjuntos, quer dizer das operações sobre conjuntos todos contidos no único espaço proposto. Em todo esse estudo, vamos dar as definições sistematicamente em termos de conjuntos e vamos dar as justificações sistematicamente em termos de indicatrizes, isto até nos raros casos em que o processo das indicatrizes possa resultar ligeiramente mais alongado do que o processo directo.

§ 3 — AS OPERAÇÕES DE COMPLEMENTAÇÃO, DE SUBTRACÇÃO (CORRENTE) E DE SUBTRACÇÃO SIMÉTRICA

1. Complementação

Conforme vínhamos praticando no § 2, vamos prosseguir, daqui por diante, com a seguinte *convenção:* Sempre que tivermos um símbolo representativo dum conjunto contido no espaço dado, a letra I acompanhada do mesmo símbolo, colocado em índice, passa a referir a indicatriz correspondente a esse conjunto.

Posto isso, dado o espaço $\Omega(\omega)$ e escolhido arbitrariamente um conjunto $A \leqslant \Omega$, representemos por A^- e chamemos *complemento* de *A* ao conjunto formado pelos pontos $\omega \bar{\varepsilon} A$. Nestes termos, a *complementação* (de A) será a operação que converte A em A^-, a qual se sujeita à seguinte fórmula (relativa a indicatrizes):

$$I_{A^-}(\omega) \equiv 1 - I_A(\omega) \quad \text{ou} \quad I_{A^-} = 1 - I_A. \tag{3}$$

Para verificar 3), basta considerar os casos em que I_{A^-} assume o valor 1 e o valor 0. No primeiro caso, $\omega \varepsilon A^-$ donde $\omega \bar{\varepsilon} A$, $I_A(\omega) = 0$ e $1 - I_A(\omega) = 1$; no outro caso, $\omega \bar{\varepsilon} A^-$ donde $\omega \varepsilon A$, $I_A(\omega) = 1$ e $1 - I_A(\omega) = 0$.

Vejamos agora as principais propriedades da complementação.

1.ª propriedade ou propriedade involutiva: «Seja qual for o conjunto $A \leqslant \Omega$, tem-se sempre $(A^-)^- = A$; quer dizer não só A^-

é o complemento de A, como também A é o complemento de A^-.» — Com efeito, $I_{(A^-)^-}=1-I_{A^-}=1-(1-I_A)=I_A$ e a tese decorre do teorema 3.

2.ª propriedade: «Seja qual for o conjunto $A\leqslant\Omega$, há sempre disjunção entre A e A^-.» — Com efeito, $I_A(\omega)\,.\,I_{A^-}(\omega)\equiv I_A(\omega)\,.\,[1-I_A(\omega)]\equiv 0$ e a tese decorre do teorema 5.

3.ª propriedade: «Não só a relação $A\leqslant B$ é equivalente à relação $A^-\geqslant B^-$, como também a relação $A=B$ é equivalente à relação $A^-=B^-$.» — Com efeito, atendendo ao teorema 4 à fórmula 3), a relação $A\leqslant B$ é equivalente à relação $I_A\leqslant I_B$, por sua vez equivalente à relação $I_{A^-}\geqslant I_{B^-}$, esta equivalente a $A^-\geqslant B^-$. Por outro lado, atendendo ao teorema 3, $A=B$ é equivalente a $I_A=I_B$, por sua vez equivalente a $I_{A^-}=I_{B^-}$, por fim equivalente a $A^-=B^-$.

4.ª propriedade: «A relação $\overline{\omega\varepsilon}A$ é equivalente à relação $\omega\varepsilon A^-$.»†

— Com efeito, temos a seguinte cadeia de equivalências:

$$\overline{\omega\varepsilon}A \rightleftarrows I_A(\omega)=0 \rightleftarrows I_{A^-}(\omega)=1 \rightleftarrows \omega\varepsilon A^-.$$

Daqui por diante preferiremos sempre o simbolismo $\omega\varepsilon A^-$ ao outro a que ele é equivalente.

Exemplo 3. Pretendemos provar a seguinte asserção: «Para que os conjuntos A e B sejam disjuntos, é condição necessária e suficiente que um deles seja subconjunto do complemento do outro. Em aditamento, verificada a condição referida, esse outro conjunto será , por sua vez, subconjunto do complemento do primeiro.» — Começando pela parte adicional, as propriedades 3.ª e 1.ª provam a equivalência entre $A\leqslant B^-$ e $(B^-)^-=B\leqslant A^-$. Por isso, não perdemos em generalidade se pusermos $B\leqslant A^-$ como condição necessária e suficiente do enunciado. Então, o teorema 5, a fórmula 3) e o teorema 4 justificam a seguinte cadeia de equivalências:

$$\text{A e B disjuntos} \rightleftarrows I_A I_B=0 \rightleftarrows I_{A^-}\,.\,I_B=I_B \rightleftarrows I_B\leqslant I_{A^-} \rightleftarrows B\leqslant A^-.$$

---

† Esta propriedade decorre também do texto subsequente à fórmula 3).

2. Subtracção (corrente)

Escolhidos arbitrariamente dois conjuntos A e B, ambos contidos em Ω, representemos por $A-B$ e chamemos *diferença entre A e B* ao conjunto formado pelos pontos ω tais que se verifica simultaneamente $\omega\varepsilon A$ e $\omega\varepsilon B^-$. Nestes termos, o conjunto A será o *diminuendo*, o conjunto B será o *diminuidor* e a *subtracção* (entre A e B) será a operação que converte o par A, B em $A-B$.

Posto isso, vale a seguinte fórmula, relativa a indicatrizes:

$$I_{A-B}(\omega) \equiv I_A(\omega)\cdot[1-I_B(\omega)] \quad \text{ou} \quad I_{A-B}=I_A(1-I_B). \qquad (4)$$

Verificação de 4). Caso se tenha $I_{A-B}(\omega)=1$, resulta $I_A(\omega)=1$ e $I_B(\omega)=0$ donde $I_A(\omega).[1-I_B(\omega)]=1$. Por outro lado, caso se tenha $I_{A-B}(\omega)=0$, resulta ou $I_A(\omega)=0$ ou $I_A(\omega)=1=I_B(\omega)$ donde, em qualquer uma das hipóteses, $I_A(\omega)\cdot[1-I_B(\omega)]=0$. †

Nesta altura, convém notar que a subtracção (entre conjuntos contidos em Ω) é uma operação *iterável*. Assim, se juntarmos aos conjuntos A e B acima considerados novos conjuntos C, D, E,..., todos contidos em Ω, podemos formar $(A-B)-C$, $[(A-B)-C]-D$, $\{[(A-B)-C]-D\}-E$, etc. onde os parêntesis, colchetes, chavetas, etc. servem para precisar a ordem pela qual devem efectuar-se as sucessivas operações de subtracção.

Vejamos agora as principais propriedades da subtracção.

1.ª Propriedade: «A complementação é um caso particular da subtracção. Em pormenor, seja qual for $B\leqslant\Omega$, tem-se $B^-=\Omega-B$.» — Com efeito, pela fórmula 4) temos $I_{\Omega-B}=I_\Omega(1-I_B)$; logo a tese decorre das fórmulas 2) e 3) e do teorema 3.

2.ª propriedade: «Seja qual for o conjunto $A\leqslant\Omega$, tem-se $A-O=A$; por outras palavras, O é *diminuidor neutro.*» — Com efeito, pela fórmula 4) temos $I_{A-O}=I_A\,(1-I_O)$; logo a tese decorre

† Caso valha $A\geqslant B$, o teorema 4 dá $I_AI_B=I_B$ donde $I_{A-B}=I_A-I_B$.

da fórmula 1) e do teorema 3. Claro que existe uma dedução por via directa que evita o recurso a indicatrizes.

3.ª propriedade: «Sejam quais forem os conjuntos A e B, tem-se sempre $A-B\leqslant A$.» — Com efeito, tendo em conta 4), $1-I_B\leqslant 1$ impõe $I_{A-B}\leqslant I_A$; logo a tese segue do teorema 4.

4.ª propriedade: «Sempre que tivermos $A\leqslant B$, resulta $A-B=O$.» — Com efeito, tem-se, por hipótese, $I_A\leqslant I_B$ donde, escolhido arbitrariamente um ponto ω, ou $I_A(\omega)=0$ ou $I_A(\omega)=1=I_B(\omega)$ resultando, em ambos os casos, $I_{A-B}(\omega)=0$ e logo $A-B=O$. Repare-se em que $A\leqslant B$ sempre que $A=O$, $A=B$ e $B=\Omega$.

5.ª propriedade: «A disjunção entre A e B implica $A-B=A$.» — Com efeito, admitida a hipótese de disjunção, o teorema 5 dá $I_AI_B=0$ donde $I_{A-B}=I_A$ e logo $A-B=A$. Note-se que a 2.ª propriedade é o caso particular da 5.ª em que $B=O$.

6.ª propriedade: «Sejam quais forem os conjuntos A, B e C, tem-se sempre $(A-B)-C=(A-C)-B$.» — Com efeito, a fórmula 4) dá

$$I_{(A-B)-C}=[I_A(1-I_B)](1-I_C)=[I_A(1-I_C)](1-I_B)=I_{(A-C)-B}$$

e a tese decorre do teorema 3.

Exercício 4. Prove a disjunção entre $A-B$ e $B-A$ e mostre que $A-B=B-A$ se e só se $A=B$ (não-comutatividade da subtracção).

Exercício 5. Prove que $(A-B)-C=A-(B-C)$ se e só se A e C forem disjuntos (entre si).

3. **Subtracção Simétrica**

Em seguida, vamos definir uma operação que alguns autores votam ao desprezo e que outros utilizam com a sistematicidade possível.

Escolhidos arbitrariamente dois conjuntos A e B, ambos contidos em Ω, representemos por $A\Delta B$ e chamemos *diferença simétrica entre* A *e* B ao conjunto formado pelos pontos ω tais que ou se tem simultaneamente $\omega\varepsilon A$ e $\omega\varepsilon B^-$ ou se tem simultaneamente $\omega\varepsilon A^-$ e $\omega\varepsilon B$. Nesta conformidade, o conjunto A será o *primeiro termo,* o conjunto B será o *segundo termo* e a *subtracção simétrica* (entre A e B) será a operação que converte o par A, B em $A\Delta B$.

Posto isso, vale a seguinte fórmula (relativa a indicatrizes):

$$I_{A\Delta B}(\omega) = |I_A(\omega) - I_B(\omega)| = [I_A(\omega) - I_B(\omega)]^2 \qquad (5)$$

ou

$$I_{A\Delta B} = |I_A - I_B| = (I_A - I_B)^2$$

Verificação de 5). Comecemos pela versão dos módulos. Caso se tenha $I_{A\Delta B}(\omega)=1$, resulta ou $I_A(\omega)=1$ e $I_B(\omega)=0$ ou $I_A(\omega)=0$ e $I_B(\omega)=1$ donde, em qualquer uma das hipóteses, $|I_A(\omega)-I_B(\omega)| = 1$. Por outro lado, caso se tenha $I_{A\Delta B}(\omega)=0$, resulta ou $I_A(\omega) = 1 = I_B(\omega)$ ou $I_A(\omega)=0=I_B(\omega)$ donde, em qualquer uma das hipóteses, $|I_A(\omega)-I_B(\omega)| = 0$.

Passa-se para a versão dos quadrados notando que

$$|I_A - I_B| = |I_A - I_B|^2 = (I_A - I_B)^2.$$

Claro que a versão dos módulos tem aspecto mais simples e que a versão dos quadrados oferece a vantagem da sua estrutura polinomial (do grau 2).

Convém notar que a subtracção simétrica (entre conjuntos contidos em Ω) é também uma operação *iterável,* isto em termos formais sensivelmente decalcados dos utilizados para a subtracção corrente.

Vejamos agora algumas propriedades da subtracção simétrica.

1.ª propriedade: «A subtracção simétrica é uma operação *comutativa.*» — A tese é óbvia em face da fórmula 5).

2.ª propriedade: «Seja qual for o conjunto $A \leqslant \Omega$, tem-se

$A \Delta O = A$, $A \Delta \Omega = A^-$ e $A \Delta A = O$.» — Com efeito,

$I_{A \Delta O} = | I_A - 0 | = I_A$, $I_{A \Delta \Omega} = | I_A - 1 | = I_{A^-}$

e $I_{A \Delta A} = | I_A - I_A | = 0$.

Note-se que O é *elemento neutro* da subtracção simétrica.

3.ª propriedade: «A subtracção simétrica é uma *operação associativa.*» — Com efeito, sejam quais forem os conjuntos A, B e C, o recurso ao teorema 2 conduz a desenvolvimentos idênticos para

$$I_{(A \Delta B) \Delta C} = [(I_A - I_B)^2 - I_C]^2$$

e para $I_{A \Delta (B \Delta C)} = [I_A - (I_B - I_C)^2]^2$,

a saber a $(I_A + I_B + I_C) - 2(I_A I_B + I_B I_C + I_C I_A) + 4 I_A I_B I_C$.

Exercício 6. Prove que $A \Delta B = O$ se e só se $A = B$ (compare com a parte final da 2.ª propriedade).

§ 4 — AS OPERAÇÕES DE INTERSECÇÃO, DE UNIÃO E DE ADIÇÃO

1. Intersecção

Dados o espaço $\Omega(\omega)$ e a família de índices $T(t)$, suponhamos que lhes corresponde a família de conjuntos $A_t \leqslant \Omega$ (veja-se o n.º *4* do § 1). Vamos representar por $\underset{t\epsilon T}{\wedge} A_t$ ou, mais abreviadamente, por $\underset{t}{\wedge} A_t$ ou, ainda mais abreviadamente, por $\wedge A_t$ e vamos chamar *intersecção* dos conjuntos A_t (quando t percorre T) ao conjunto formado pelos pontos ω que tenham a propriedade de pertencerem simultaneamente a *todos* os conjuntos A_t da respectiva família. Nesta conformidade, é uso chamar *conjuntos secantes* aos conjuntos A_t envolvidos e chamar *intersecção* à operação que converte esses conjuntos em $\underset{t\epsilon T}{\wedge} A_t$. Note-se que a operação ficou com designação igual à do seu resultado, obrigando-nos assim a distinguir entre (operação de) intersecção e (conjunto—) intersecção, e que se propuseram três simbolismos, por ordem crescente de simplicidade e por ordem decrescente de expressividade, cabendo a escolha entre eles a um critério de oportunidade.

No caso particular $T=\{1,2,\dots,n,\dots\}$ (família T finita ou infinita) é usual representar o conjunto secante genérico por A_n (o *n-ésimo conjunto secante)* e não é raro recorrer-se à notação mais pormenorizada $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \dots$ colocando explicitamente símbolos de intersecção entre conjuntos secantes consecutivos. Assim, se tivermos $T=\{1, 2, 3, 4\}$, ficará $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$.

Caso T compreenda um só índice t, a nossa definição de intersecção leva-nos a considerar o único conjunto A_t como intersecção (degenerada) coincidente com o seu único conjunto secante. Acrescentemos que há ocasiões em que convém considerar uma intersecção (fictícia) desprovida de conjuntos secantes, a qual se identifica, por motivos a referir mais adiante, com o conjunto Ω (por estranha que se afigure uma tal *convenção* à primeira vista).

Posto isso, vale a seguinte fórmula, relativa a indicatrizes:

$$I_{\bigwedge_{t\epsilon T} A_t} = \inf_{t\epsilon T} I_{A_t} \quad \text{ou} \quad I_{\bigwedge_t A_t} = \inf_{t\epsilon T} I_{A_t} \quad \text{ou} \quad I_{\bigwedge A_t} = \inf I_{A_t}, \tag{6}$$

onde cada um dos símbolos inf refere o ínfimo das funções I_{A_t} ou seja a função que em cada ponto ω coincide com o ínfimo numérico dos números $I_{A_t}(\omega)$, ínfimo numérico esse que vale 1 se nenhum $I_{A_t}(\omega)$ valer 0 e que vale 0 em todos os demais casos.

Justificação de 6). Claro que a convenção atrás feita impõe um ínfimo coincidente com a constante 1 sempre que houver ausência de conjuntos secantes. Nos demais casos, um ponto ω tal que $I_{\bigwedge A_t}(\omega) = 1$ dá $\omega \varepsilon A_t$ para cada t, donde $\inf I_{A_t}(\omega) = 1$, e um ponto ω tal que $I_{\bigwedge A_t}(\omega) = 0$ dá $\omega \varepsilon A^-_t$ para algum t, donde $\inf I_{A_t}(\omega) = 0$, c. q. d.

Observação. As fórmulas 6) e 2) mostram que resulta igual a Ω *qualquer* intersecção de conjuntos todos iguais a Ω.

No caso particular $T=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ temos uma simplificação estrutural da fórmula 6), a saber:

$$I_{\bigwedge_n A_n} = \prod_n I_{A_n} \quad \text{ou} \quad I_{\bigwedge A_n} = \prod I_{A_n}, \tag{6'}$$

onde cada um dos símbolos Π refere o produto das funções I_{A_n} (em número finito ou infinito), produto esse que em cada ponto ω coincide com o número 1 ou com o número 0, conforme todos os factores tiverem o valor 1 ou houver factores com o valor 0.

Justificação de 6'). Basta atender a que, escolhido arbitrariamente um ponto ω, vale $\inf I_{A_n}(\omega) = \Pi I_{A_n}(\omega)$.

Vejamos agora as principais propriedades da operação de intersecção.

1.ª propriedade ou propriedade comutativa: «A intersecção é uma operação *comutativa em sentido lato,* quer dizer é insensível a quaisquer trocas de lugares entre os conjuntos secantes.» — Com efeito, nenhuma troca do tipo referido no enunciado exerce qualquer influência sobre os ínfimos da fórmula 6).

2.ª propriedade ou propriedade associativa: «A intersecção é uma operação *associativa em sentido lato,* quer dizer se cindirmos de qualquer modo a família de índices T(t) (inculcadora da intersecção proposta) em subfamílias ou famílias parciais (disjuntas duas a duas ou seja destituídas de índices comuns a subfamílias diferentes) $T_u(t_u)$, com o subíndice u a percorrer um conjunto não-vazio (finito ou infinito numerável ou transnumerável), então a intersecção de todas as intersecções parciais $\underset{t_u \epsilon T_u}{\mathrm{A}} A_{t_u}$ coincide com a intersecção primitiva $\underset{t \epsilon T}{\mathrm{A}} A_t$.» — Com efeito, a indicatriz da intersecção de todas as intersecções parciais, ou seja o ínfimo (com respeito a todos os u admissíveis) de todos os ínfimos parciais $\inf\limits_{t_u \epsilon T_u} I_{A_{t_u}}$, coincide com $\inf\limits_{t \epsilon T} I_{A_t} = I_{\underset{t \epsilon T}{\mathrm{A}} A_t}$, porque, se trabalharmos com um ponto $\omega \varepsilon A_t$ para cada t, o ínfimo dos ínfimos persiste com o valor 1 do ínfimo global e porque, se trabalharmos com um ponto $\omega \varepsilon A_t^-$ para algum t, o ínfimo dos ínfimos persiste com o valor 0 do ínfimo global. Escusado será dizer que agora as intersecções globais degeneradas estão fora de causa.

3.ª propriedade ou propriedade monotónica: «Escolhida arbitrariamente uma intersecção de conjuntos, ela está contida em qualquer intersecção parcial.» — Com efeito, sendo T'(t') uma subfamília de T(t), tem-se

$$I_{\underset{t'}{\mathrm{A}} A_{t'}} = \inf_{t'} I_{A_{t'}} \geqslant \inf_{t} I_{A_t} = I_{\underset{t}{\mathrm{A}} A_t}$$

e a tese decorre do teorema 4.

Em particular:

«A intersecção está contida em qualquer um dos conjuntos secantes.»

4.ª propriedade ou propriedade absorvente: «A intersecção de conjuntos é uma operação insensível à supressão de qualquer intersecção parcial que contenha outra intersecção parcial formada por conjuntos cujos índices não entrem na primeira intersecção parcial referida.» — Com efeito, admita-se que a família T(t) se cinde em 3 subfamílias (disjuntas duas a duas) T'(t'), T''(t'') e T*(t*) por forma tal que

$$\underset{t'}{\wedge} A_{t'} \geqslant \underset{t''}{\wedge} A_{t''} ,$$

que as duas primeiras sejam famílias no sentido estrito do termo e que a última o seja no sentido alargado de poder ficar vazia (com as respectivas implicações para intersecções e ínfimos). Atendendo à formula 6) e ao teorema 4, resulta $\inf_{t'} I_{A_{t'}} \geqslant \inf_{t''} I_{A_{t''}}$ e logo a segunda propriedade supracitada conduz ao seguinte cálculo:

$$I_{\underset{t}{\wedge} A_t} = \inf(\inf_{t'} I_{A_{t'}}, \inf_{t''} I_{A_{t''}}, \inf_{t*} I_{A_{t*}}) = \inf(\inf_{t''} I_{A_{t''}}, \inf_{t*} I_{A_{t*}}) =$$

$$= \inf_{t \neq t'} I_{A_t} = I_{\underset{t \neq t'}{\wedge} A_t} .$$

Assim a tese decorre do teorema 3.

Talvez convenha acrescentar que, por um lado, um caso especial mais simples é o caso em que houver uma subfamília T' ou T'' com um só índice e que, por outro lado, o caso da subfamília T'[ou T''] formada pelo único conjunto Ω[ou *O*] institui o espaço Ω [ou conjunto *O*] em elemento *neutro* [ou *absorvente*] da (operação de) intersecção.

Exemplo 4. «Escolhidos arbitrariamente dois conjuntos A e B, ambos contidos no espaço dado, há disjunção entre eles se e só se for vazia a sua intersecção.» — A prova decorre dos teoremas 3 e 5 e das fórmulas 1) e 6).

2. União

Retomemos a família de conjuntos $A_t \leqslant \Omega$, com o índice t a percorrer a família T. Vamos representar por $\underset{t \in T}{V} A_t$ ou, mais abreviadamente, por $\underset{t}{V} A_t$ ou, ainda mais abreviadamente, por $V A_t$ e vamos chamar *união* † dos conjuntos A_t (quando t percorre T) ao conjunto formado pelos pontos ω que tenham a propriedade de pertencer a *algum* (um ou mais) conjunto A_t da respectiva família. Nesta conformidade, é uso chamar *parcelas* aos conjuntos A_t envolvidos e chamar *união* † à operação que converte esses conjuntos em $\underset{t \in T}{V} A_t$. Note-se que a operação ficou com designação igual à do seu resultado, obrigando-nos assim a distinguir entre (operação de) união e (conjunto—) união, e que se propuseram três simbolismos, por ordem crescente de simplicidade e por ordem decrescente de expressividade, cabendo a escolha entre eles a um critério de oportunidade.

No caso particular $T = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ (família T finita ou infinita) é usual representar a parcela genérica por A_n (a *n-ésima parcela)* e não é raro recorrer-se à notação mais pormenorizada $A_1 V A_2 V \dots V A_n V \dots$ colocando explicitamente símbolos de união entre parcelas consecutivas. Exemplifiquemos com $T=\{1,2,3\}$: ficará $A_1 V A_2 V A_3$.

Caso T compreenda um só índice t, a nossa definição de união leva-nos a considerar o único conjunto A_t como união (degenerada) coincidente com a sua única parcela. Acrescentemos que há ocasiões em que convém considerar uma união (fictícia) desprovida de parcelas, a qual se identifica, por conveniência, com o conjunto O (*convenção* esta que se afigura plausível).

Posto isso, vale a seguinte fórmula (relativa a indicatrizes):

$$I_{\underset{t \in T}{V} A_t} = \sup_{t \in T} I_{A_t} \quad \text{ou} \quad I_{\underset{t}{V} A_t} = \sup_t I_{A_t} \quad \text{ou} \quad I_{V A_t} = \sup_t I_{A_t}, \qquad (7)$$

onde cada um dos símbolos sup refere o supremo das funções I_{A_t} ou seja a função que em cada ponto ω coincide com o supremo

† Há quem diga *reunião* em lugar de união.

numérico dos números $I_{A_t}(\omega)$, supremo numérico esse que vale 0 se nenhum $I_{A_t}(\omega)$ valer 1 e que vale 1 em todos os demais casos.

Justificação de 7). Claro que a convenção atrás feita impõe um supremo coincidente com a constante 0 sempre que houver ausência de parcelas. Nos casos restantes, um ponto ω tal que $I_{VA_t}(\omega) = 0$ dá $\omega \varepsilon A_t^-$ para cada t, donde $\sup I_{A_t}(\omega) = 0$, e um ponto ω tal que $I_{VA_t}(\omega) = 1$ dá $\omega \varepsilon A_t$ para algum t, donde $\sup I_{A_t}(\omega) = 1$, c. q. d.

Observação. As fórmulas 7) e 1) mostram que resulta vazia *qualquer* união de conjuntos todos iguais a O.

No caso especial $T=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ podemos usar um desenvolvimento de 7) que é formalmente mais complicado e que é estruturalmente mais simples, a saber:

$$I_{A_1 V A_2 V A_3 V \ldots V A_n V \ldots} = \sup_n I_{A_n} = \tag{7'}$$

$$= I_{A_1} + (1-I_{A_1}) I_{A_2} + (1-I_{A_1})(1-I_{A_2}) I_{A_3} + \ldots$$

$$\ldots + (1-I_{A_1}) \ldots (1-I_{A_{n-1}}) I_{A_n} + \ldots .$$

Justificação de 7'). Escolhido um ponto ω que não pertença à união, o primeiro membro de 7') assumirá o valor 0 e o mesmo sucede ao último membro, já que $\omega \varepsilon A_n^-$ para cada n donde o valor 0 para cada I_{A_n}. Por outro lado, escolhido um ponto ω que pertença à união, o 1.º membro de 7') assumirá o valor 1 e o mesmo sucede ao último membro pela razão subsequente. Haverá um primeiro valor do índice, seja k, tal que $\omega \varepsilon A_k$, pelo que: ou $k=1$, I_{A_1} assume o valor 1 e $1-I_{A_1}$ assume o valor 0; ou $k>1$, I_{A_n} assume o valor 0 para $n<k$, $(1-I_{A_1})\ldots(1-I_{A_{k-1}}) I_{A_k}$ assume o valor 1 e $(1-I_{A_1})\ldots(1-I_{A_{n-1}}) I_{A_n}$ tem o factor $1-I_{A_k}=0$ para $n > k$, c. q. d.

Há um caso particular de 7') digno de registo, a saber o caso em que os conjuntos A_n se constituem em sequência ou sucessão ascendente ou crescente, enfim o caso $A_n\uparrow$. Corresponde a seguinte simplificação de 7'):

Na hipótese $A_n\uparrow$, tem-se

$$I_{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n \vee \ldots} = I_{A_1} + (1-I_{A_1})\, I_{A_2} + \qquad (7'')$$

$$+ (1-I_{A_2})\, I_{A_3} + \ldots + (1-I_{A_{n-1}})\, I_{A_n} + \ldots ,$$

Justificação de 7"). A hipótese $A_n\uparrow$ implica, pelo teorema 4, a relação $1-I_{A_1} \geqslant \ldots \geqslant 1-I_{A_{n-1}}$ para todo o $n \geqslant 3$. Como os membros da desigualdade posta só podem assumir os valores 0 e 1, resulta $(1-I_{A_1}) \ldots (1-I_{A_{n-1}}) = 1-I_{A_{n-1}}$ para todo o $n \geqslant 3$, c. q. d.

Observação. Há um paralelismo ou *dualismo* muito acentuado quando se confrontam as considerações iniciais relativas à intersecção, até à fórmula 6) incluída, com as considerações relativas à união, até à fórmula 7) incluída. Mas este dualismo quebra no confronto entre 6') e 7'), isto em benefício de 6') que é de estrutura mais simples do que 7'). Veremos que ele vai reaparecer nas considerações subsequentes.

Vejamos agora as principais propriedades da operação de união.

1.ª propriedade ou propriedade comutativa: «A união é uma operação *comutativa em sentido lato,* quer dizer é insensível a quaisquer trocas de lugares entre as parcelas.» — Serve a justificação da propriedade comutativa da intersecção se substituirmos aí ínfimos por supremos e 6) por 7).

2.ª propriedade ou propriedade associativa: «A união é uma operação *associativa em sentido lato,* quer dizer se cindirmos de qualquer modo a família de índices T(t) (inculcadora da união proposta) em subfamílias ou famílias parciais (disjuntas duas a duas) $T_u(t_u)$, com o subíndice u a percorrer um conjunto não-vazio (finito ou infinito numerável ou transnumerável), então a união de todas as uniões parciais $\underset{t_u \in T_u}{V} A_{t_u}$ coincide com a união primitiva $\underset{t\in T}{V} A_t$.» — Serve a justificação da propriedade associativa da intersecção se substituirmos aí intersecção por união, ínfimo por supremo, Λ por V, $\omega \varepsilon A_t$ por $\omega \varepsilon A_t^-$ e vice-versa e 0 por 1 e vice-versa.

3.ª propriedade ou propriedade monotónica: «Escolhida arbitrariamente uma união de conjuntos, ela contém qualquer união parcial.» — Serve a justificação da 3.ª propriedade da intersecção se substituirmos aí Λ por V, inf por sup e $\geqslant$ por $\leqslant$.

Em particular:

«a união contém qualquer uma das suas parcelas.»

4.ª propriedade ou propriedade absorvente: «A união de conjuntos é uma operação insensível à supressão de qualquer união parcial que esteja contida noutra união parcial formada por conjuntos cujos índices não entrem na primeira união parcial referida.» — Serve a justificação da propriedade absorvente da intersecção se substituirmos aí Λ por V, $\geqslant$ por $\leqslant$, 6) por 7), inf por sup e $\geqslant$ por $\leqslant$.

Também serve o comentário aposto à propriedade absorvente da intersecção se trocarmos aí Ω e O, podendo afirmar-se que O [ou Ω] é elemento *neutro* [ou *absorvente*] da (operação de) união.

Exemplo 5. A propriedade comutativa da união e a fórmula 7') permitem escrever

$$I_{A_1 V A_2 V A_3 V \dots V A_n V \dots} = I_{A_{k_1}} + (1-I_{A_{k_1}})\, I_{A_{k_2}} +$$

$$+ (1-I_{A_{k_1}})(1-I_{A_{k_2}})\, I_{A_{k_3}} + \dots + (1-I_{A_{k_1}})\dots(1-I_{A_{k_{p-1}}})\, I_{A_{k_p}} + \dots, \tag{7'*}$$

onde $k_1, k_2, k_3, \dots, k_p, \dots$ representa uma permutação (arbitrariamente escolhida) da sequência ou sucessão 1,2,3, ... , n, ... Note-se que uma adaptação análoga para 7") falha em geral, porque é raro ter-se $A_{k_p}\uparrow$ (na hipótese de se ter $A_n\uparrow$).

Exercício 7. Prove que $\underset{n}{V} A_n = A_1$ sempre que $A_n\downarrow$ e que $\underset{n}{\Lambda} A_n = A_1$ sempre que $A_n\uparrow$.

3. **Adição.**

Retomemos a união $\underset{t\in T}{V} A_t$ e suponhamos que as suas parcelas, por hipótese todas contidas no espaço Ω, são *disjuntas duas a duas ou, equivalentemente, formam duas a duas intersecções vazias* (veja-se o exemplo 4). Neste caso particular, podemos chamar *adição* à operação de união, podemos chamar *conjuntos somados* às parcelas, podemos chamar *soma* ao conjunto-união e podemos representar uma tal soma por $\underset{t\in T}{\dot{\Sigma}} A_t$ ou, mais abreviadamente, por $\underset{t}{\dot{\Sigma}} A_t$ ou, ainda mais abreviadamente, por $\dot{\Sigma} A_t$, cabendo a escolha entre os três simbolismos a um critério de oportunidade. Note-se que a soma referida é o conjunto formado pelos pontos ω que têm a propriedade de pertencer a *um e só um* conjunto A_t da respectiva família.

No caso especial $T = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ (família T finita ou infinita) não é raro recorrer-se à notação mais pormenorizada $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_n \dot{+} \dots$ colocando explicitamente um certo símbolo de adição entre conjuntos somados consecutivos. Exemplifiquemos com $T = \{1,2\}$: ficará $A_1 \dot{+} A_2$.

Caso T compreenda um só índice t, consideramos o único conjunto A_t como soma (degenerada) coincidente com o seu único conjunto somado. Também consideramos uma soma (fictícia) desprovida de conjuntos somados, a qual identificamos com o conjunto O. Conforme se vê, com menos de duas parcelas a união será sempre soma ou adição.

Claro que a fórmula 7) subsiste no caso particular da adição e o mesmo se diz de 7').

Todavia, agora 7') simplifica-se como segue:

$$I_{A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \dot{+} \dots \dot{+} A_n \dot{+} \dots} = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3} + \dots + I_{A_n} + \dots \qquad (8)$$

ou

$$I_{\dot{\Sigma}_n A_n} = \Sigma_n I_{A_n}.$$

Justificação de 8). Atendendo a 7), a fórmula 8) é equivalente à igualdade $\sup_n I_{A_n} = \Sigma_n I_{A_n}$ sempre que os conjuntos A_n forem disjuntos dois a dois. Posto isso, se o ponto ω deixar de pertencer à soma, então $\sup_n I_{A_n}$ assume o valor 0 e o mesmo sucede a $\Sigma_n I_{A_n}$, já que $\omega \varepsilon A_n^-$ para cada n. Por outro lado, se o ponto ω pertencer à soma, então $\sup_n I_{A_n}$ assume o valor 0 e o mesmo sucede a $\Sigma_n I_{A_n}$, já que $\omega \varepsilon A_n$ para um e só um valor de n.

Pondo $A_1 = A$ e $A_2 = A^-$ e atendendo à segunda propriedade da complementação, tiramos das fórmulas 8), 3) e 2) que $I_{A \dot{+} A^-} = I_A + (1 - I_A) = I_\Omega$ donde, pelo teorema 3, a seguinte relação, válida para qualquer A:

$$\Omega = A \dot{+} A^-. \qquad (8')$$

Por outro lado, seja qual for A, os diversos conjuntos elementares $\{\omega\} < A$ resultam disjuntos dois a dois, reconhece-se que vale a relação $I_A = \sup_{\omega \epsilon A} I_{\{\omega\}}$ e, portanto, a fórmula 7) e o teorema 3 dão

$$A = \dot{\Sigma}_{\omega \epsilon A} \{\omega\}. \qquad (8'')$$

Postos esses preliminares, seguem as principais propriedades da adição.

Propriedades comutativa e associativa: «A adição é uma operação *comutativa em sentido lato* e também *associativa em sentido lato.*» — A comutatividade da adição é apenas um caso particular da comutatividade da união. Por outro lado, a associatividade da adição será um caso particular da associatividade da união, desde que as somas parciais $\dot{\sum}_{t_u \in T_u} A_{t_u}$ sejam conjuntos disjuntos dois a dois (quando u varia). Ora, se u' e u" $\neq$ u' forem duas determinações de u, então a disjunção entre $\dot{\sum}_{t_{u'}} A_{t_{u'}}$ e $\dot{\sum}_{t_{u''}} A_{t_{u''}}$ não pode falhar porque, se isso acontecesse, existiria um ponto ω tal que $\sup_{t_{u'}} I_{A_{t_{u'}}}(\omega) . \sup_{t_{u''}} I_{A_{t_{u''}}}(\omega) = 1$ e cairíamos em contradição com a hipótese de se ter $I_{A_{t_{u'}}} \cdot I_{A_{t_{u''}}} = 0$ para todos os pares $t_{u'}$ e $t_{u''}$.

Propriedade monotónica: «Escolhida arbitrariamente uma soma de conjuntos, ela contém qualquer uma das suas somas parciais.» — Esta propriedade é apenas um caso particular da propriedade monotónica da união.

Em particular:

«a soma contém qualquer um dos conjuntos somados.»

Propriedade absorvente: Se quisermos adaptar a propriedade absorvente da união ao caso particular da adição, o que vimos a propósito da propriedade associativa da adição esclarece que as somas parciais utilizáveis são necessariamente disjuntas duas a duas, pelo que a precedente propriedade monotónica e a propriedade transitiva do exemplo 2 mostram que qualquer uma dessas somas parciais só pode conter outra soma parcial utilizável se esta tiver parcelas todas vazias. Assim o conjunto O será elemento *neutro* da adição e o interesse da propriedade absorvente fica por aí.

Exercício 8. Dê uma condição necessária e suficiente para que uma soma de conjuntos seja igual a uma das suas somas parciais, isto em termos dos conjuntos somados que não entram nessa soma parcial. Em seguida, resolva a questão mais geral que se obtém substituindo no texto precedente soma por união e conjuntos somados por parcelas.

§ 5 — OPERAÇÕES INTERNAS COMBINADAS

1. Igualdades de Morgan

Quando se está em presença duma família de conjuntos contidos no espaço dado $\Omega(\omega)$, pode haver interesse em fazer incidir sobre eles operações diversificadas, escolhidas entre as até agora estudadas, a que vamos chamar *internas* (porque não se chega a sair de Ω). Em tal caso, o uso de parêntesis, colchetes, chavetas, etc. constitui, eventualmente, o meio apropriado para assinalar a ordem pela qual devem efectuar-se as operações envolvidas. Exemplifiquemos: Sendo A, B, C e D quatro conjuntos contidos em Ω e havendo disjunção entre A e B, então $[D \wedge (B-C)^-] \vee \{C - [D^- \wedge (A \dot{+} B)]\}$ designa a união que tem por primeira parcela a intersecção de D com o complemento da diferença entre B e C e que tem por segunda parcela a diferença entre C e a intersecção do complemento de D com a soma de A e B.

Uma situação especial um tanto frequente é que duas marchas de operações, efectuadas sobre os mesmos conjuntos e distintas uma da outra, vão conduzir a conjuntos resultantes iguais entre si, dando assim lugar a uma igualdade entre dois conjuntos que se apresentam sob formas bem diversas. Uma tal igualdade poderá provar-se em princípio, ou recorrendo ao teorema 1 ou recorrendo ao teorema 3. † Em seguida vamos apresentar algumas fórmulas

† Aqui utilizaremos preferentemente o teorema 3.

importantes relacionadas com esta matéria. Em todas elas, as letras latinas maiúsculas representam conjuntos, contidos em Ω e com indicatrizes I afectadas de índices que são os símbolos dos conjuntos correspondentes.

Para começar, vejamos duas fórmulas que institucionalizam o dualismo observado a propósito das operações de intersecção e de união, isto por recurso aos complementos dos conjuntos envolvidos. Vejamos:

Escolhidos arbitrariamente conjuntos A_t com o índice a percorrer uma família T(t), valem as chamadas *igualdades de Morgan*:

$$a)\quad (\underset{t}{V} A_t)^- = \underset{t}{\Lambda} A_t^- \quad \text{ou} \quad \underset{t}{V} A_t = (\underset{t}{\Lambda} A_t^-)^-; \qquad (9)$$

$$b)\quad (\underset{t}{\Lambda} A_t)^- = \underset{t}{V} A_t^- \quad \text{ou} \quad \underset{t}{\Lambda} A_t = (\underset{t}{V} A_t^-)^-$$

que podemos simplificar, omitindo os índices t afectados aos símbolos V e Λ, e que podemos pormenorizar, substituindo esses índices pela escrita mais explícita $t \epsilon T$.

Justificação de 9). Verifica-se a primeira igualdade de 9a) porque as fórmulas 3), 7) e 6) permitem escrever

$$I_{(\underset{t}{V} A_t)^-} = 1 - \sup_t I_{A_t} = \inf_t (1 - I_{A_t}) = I_{\underset{t}{\Lambda} A_t^-} .$$

Posto isso, as segundas versões de *a*) e de *b*) resultam das primeiras por meio de complementações (propriedades 1.ª e 3.ª). Por outro lado, a primeira versão de *b*) equivale à segunda versão de *a*) (substitua-se formalmente A_t por A_t^-, o que é permitido atendendo à arbitrariedade da escolha dos A_t).

Exemplo 6. Uma modificação da segunda versão de 9*b*) é a fórmula:

$$\underset{t}{\Lambda} A_t = (\underset{s}{V} A_s) - \{\underset{t}{V} [(\underset{s}{V} A_s) - A_t]\} \qquad (10)$$

na qual o índice s é apenas o índice t redesignado (por imposição notacional). Falamos em modificação porque $\underset{s}{V} A_s = \Omega$ e a primeira propriedade da subtracção reconduzem à segunda versão de 9b).

Justificação de 10). Atendendo às fórmulas 6), 7) e 4), pode justificar-se 10) provando a igualdade

$$\inf_t I_{A_t} = (\sup_s I_{A_s}) \cdot \{1 - \sup_t [(\sup_s I_{A_s})(1 - I_{A_t})]\},$$

para o que convém distinguir entre os pontos ω que conferem o valor 1 a cada I_{A_t}, os pontos ω que conferem o valor 0 a cada I_{A_t} e os restantes pontos ω.

Exercício 9. Prove que há disjunção entre A e B se e só se valer $A^- \, {}^V B^- = \Omega$.

2. Combinações com a subtracção

Posto isso, vamos ver que qualquer subtracção se pode reduzir a outra, com o diminuendo primitivo e com diminuidor contido no diminuendo, e vamos ver também que qualquer subtracção se pode reduzir a uma intersecção ou a uma união, desde que se recorra a complementações.

Com efeito, escolhidos arbitrariamente os conjuntos A e B, vale a fórmula

$$A - B = A - (A \Lambda B) = A \Lambda B^- = (A^- {}^V B)^-. \qquad (11)$$

Justificação de 11). A fórmula 4), o teorema 2 e a fórmula 6') justificam a 1.ª igualdade 11), se atendermos a

$$I_{A-B} = I_A - I_A I_B = I_A (1 - I_A I_B) = I_{A-(A\Lambda B)},$$

devendo notar-se que $A \wedge B \leqslant A$ (propriedade monotónica da intersecção). † Em seguida, as fórmulas 4), 3) e 6') justificam a segunda igualdade 11), isso atendendo a

$$I_{A-B} = I_A \, . \, I_{B^-} = I_{A \wedge B^-} \, .$$

Por fim, a fórmula 9b) e a propriedade involutiva da complementação justificam a última igualdade 11).

Exercício 10. Prove que quaisquer conjuntos A e B conduzem à relação $A-B=(A \vee B)-B$, onde o diminuendo da segunda diferença contém o respectivo diminuidor (propriedade monotónica da união).

Segue a chamada *propriedade distributiva da intersecção com respeito à subtracção,* a qual exprime que três conjuntos arbitrários A, B e C se sujeitam às relações

$$\begin{aligned} &(A-B) \wedge C=(A \wedge C)-(B \wedge C) \\ \text{e} \quad & \\ &C \wedge (A-B)=(C \wedge A)-(C \wedge B), \end{aligned} \tag{12}$$

a primeira relativa à *distributividade à direita* e a outra relativa à *distributividade à esquerda.*

Justificação de 12). Basta justificar a primeira versão de 12), já que a outra decorre da anterior por recurso à comutatividade da intersecção. Ora a primeira versão vale porque as fórmulas 6') e 4) e o teorema 2 permitem escrever

$$I_{(A-B) \wedge C}=I_A \, (1-I_B) \, I_C=I_A \, I_C \, (1-I_B \, I_C)=I_{(A \wedge C)-(B \wedge C)} .$$

Exemplo 7. Segue uma relação que talvez explique porque muitos autores põem de lado a subtracção simétrica. Pois, sejam quais forem os conjuntos A e B, vale a igualdade

$$A \wedge B=(A-B) \dotplus (B-A),$$

---

† Por vezes invoca-se a 1.ª igualdade 11) para alegar que não vale a pena definir diferenças com diminuidor arbitrário. Todavia, tal atitude acarreta uma perda de flexibilidade porventura contra-indicada.

isto porque A−B e B−A são *diferenças disjuntas,* em virtude de se ter

$$I_{A-B} \cdot I_{B-A} = I_A\, I_B\, (1-I_A)\,(1-I_B) = 0$$

(fórmula 4) e teorema 5), e porque

$$I_{(A-B)\dotplus(B-A)} = I_A\,(1-I_B) + I_B\,(1-I_A) = (I_A - I_B)^2 = I_{A\Delta B}$$

(fórmulas 8) e 4), teorema 2 e fórmula 5)).

Exercício 11. Sejam quais forem os conjuntos A, B e C, prove que valem as seguintes relações:

$$A\Delta A^{-} = \Omega;\quad A\Delta B = (A \vee B) - (A \wedge B);\quad (A\Delta B)\wedge C = (A\wedge C)\Delta(B\wedge C).$$

A última relação traduz uma *propriedade distributiva à direita,* a qual arrasta a correspondente *distributividade à esquerda* por causa da comutatividade da intersecção.

3. Intersecção e união

Consideremos quaisquer conjuntos A_{n,p_n} onde o primeiro índice n toma todos os valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$, com N fixo, e onde, para cada n, o segundo índice p_n toma todos os valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant p_n < P_n \leqslant +\infty$, com cada P_n fixo. Nesta conformidade, vale a seguinte *propriedade distributiva da intersecção com respeito à união:*

$$\underset{n}{\wedge}\,(\underset{p_n}{\vee} A_{n,p_n}) = \underset{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots}{\vee}(A_{1,p_1} \wedge A_{2,p_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p_n} \wedge \ldots), \tag{13}$$

cuja memorização é muito facilitada se nos lembrarmos da relação bem conhecida que resulta de 13), pondo aí $N < +\infty$ e interpretando os símbolos A_{n,p_n} como números finitos, as uniões como somatórios (absolutamente convergentes caso haja infinitas parcelas) e as intersecções como produtos.

Justificação de 13). Passando para indicatrizes e atendendo às fórmulas 6') e 7), a prova decorre da igualdade

$$\prod_n (\sup_{p_n} I_{A_{n,p_n}}) = \sup_{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots} (I_{A_{1,p_1}} \cdot I_{A_{2,p_2}} \ldots I_{A_{n,p_n}} \ldots),$$

a qual é fácil de controlar, quer no caso de o primeiro membro ter o valor 1 quer no caso de o primeiro membro ter o valor 0.

Passemos para o caso particular de 13) em que, seja qual for n, os conjuntos A_{n,p_n} se apresentam disjuntos dois a dois (sempre que $P_n > 2$).

Neste caso, vale a seguinte *propriedade distributiva da intersecção com respeito à adição:*

$$\bigwedge_n (\dot{\sum_{p_n}} A_{n,p_n}) = \dot{\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots}} (A_{1,p_1} \wedge A_{2,p_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p_n} \wedge \ldots). \qquad (13')$$

Justificação de 13'). Basta provar que a nossa hipótese de disjunção, relativa ao primeiro membro de 13), força as parcelas do segundo membro de 13) a serem disjuntas duas a duas. Ora, se

$$A_{1,p'_1} \wedge A_{2,p'_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p'_n} \wedge \ldots$$

e

$$A_{1,p''_1} \wedge A_{2,p''_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p''_n} \wedge \ldots$$

forem duas parcelas distintas tiradas do segundo membro de 13), então existe pelo menos um $k \geqslant 1$ tal que $p'_k \neq p''_k$, pelo que os conjuntos A_{k,p'_k} e A_{k,p''_k} resultam disjuntos e logo as parcelas referidas resultam disjuntas (propriedade monotónica da intersecção e 1.ª propriedade do n.º 4 do § 2).

Um caso especial de 13') é a fórmula

$$A=(A \wedge B) \dotplus (A-B), \text{ com } A \text{ e } B \textit{ arbitrários.} \qquad (13'')$$

Justificação de 13"). Em 13') faça-se $N=3$, $P_1=2$, $P_2=3$, $A_{1,1}=$ $=A$, $A_{2,1}=B$ e $A_{2,2}=B^-$ e atenda-se à propriedade absorvente da intersecção e às fórmulas 8') e 11).

Observação. O segundo membro da fórmula 13) ou 13') reveste-se duma característica talvez algo inesperada. — Antes de mais nada, a potência do conjunto formado por todas as intersecções que figuram no segundo membro é uma potência que certamente não aumenta quando os números P_n (finitos ou infinitos) decrescem (em sentido lato). Por outro lado, se todo o $P_n \leqslant 3$ e se houver uma infinidade de números $P_n=3$, digamos os números $P_{n_m}(m=1,2,3,\ldots)$, cada um dos correspondentes índices p_{n_m} assume os valores 1 e 2 e cada um dos restantes índices p_n (se os houver) assume apenas o valor 1. Nesta conformidade, as parcelas-intersecção

$$A_{1,p_1} \wedge A_{2,p_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p_n} \wedge \ldots$$

ficam em correspondência biunívoca e recíproca com as dízimas $0, \pi_{n_1} \pi_{n_2} \ldots \pi_{n_m} \ldots$ onde, escolhido arbitrariamente o valor de m, o algarismo π_{n_m} vale 0 se $p_{n_m}=1$ e vale 1 se $p_{n_m}=2$. — Caso se use o sistema de *numeração de base* 2 (cujos algarismos únicos são 0 e 1), aquelas dízimas preenchem o intervalo fechado formado pelos números compreendidos entre 0 e 1, aparecendo alguns números por duas vezes, como é o caso das dízimas 0,00(1) (período 1) e 0,01(0) (período 0) que têm o mesmo valor (0,01 nesta numeração que corresponde a 0,25 na numeração decimal). Ora os números do intervalo fechado referido formam um conjunto com a potência do contínuo; os números repetidos são todos racionais e, portanto, formam um conjunto com potência inferior à do contínuo (quando muito numerável). Consequentemente, as dízimas supracitadas formam um conjunto com a potência do contínuo. Concluímos assim que as parcelas-intersecção do segundo membro de 13) ou 13') formam um *conjunto com potência pelo menos igual à do contínuo sempre que houver uma infinidade de números* $P_n \geqslant 3$. — Posto isso, *se houver apenas um número finito* (eventualmente nulo) *de grandezas* $P_n \geqslant 3$ (finitas ou infinitas), é bem conhecido que as nossas parcelas-intersecção formam um *conjunto infinito numerável caso haja algum* $P_n = +\infty$ e formam um *conjunto finito com* $\prod_n (P_n - 1)$ *elementos nos demais casos.* Em particular, se $N < +\infty$ e se $P_n = 3$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$, as parcelas-intersecção formam um *conjunto finito com* 2^{N-1} *elementos.*

Exemplo 8. Há uma *propriedade distributiva da união com respeito à intersecção,* expressa através da fórmula

$$\bigvee_n \left(\bigwedge_{p_n} A_{n,p_n} \right) = \bigwedge_{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots} \left(A_{1,p_1} \vee A_{2,p_2} \vee \ldots \vee A_{n,p_n} \vee \ldots \right), \tag{14}$$

que se pode provar por um processo semelhante à justificação de 13) recorrendo, para o efeito, a supremos e ínfimos de indicatrizes. Dizemos ínfimos de indicatrizes em lugar de produtos de indicatrizes, porque a indicatriz da intersecção do segundo membro de 14), pela fórmula 6) igual ao ínfimo das indicatrizes dos conjuntos secantes, em geral *não* se sujeita à fórmula 6'), como quem diz não se reduz ao produto dessas indicatrizes; isto porque a observação precedente esclarece que os conjuntos secantes em geral não se constituem em família finita ou numerável. Como alternativa, podemos deduzir 14) de 13), substituindo em 13) todos os conjuntos pelos seus complementos (tão arbitrários quanto o são os conjuntos) e fazendo, em seguida, aplicações consecutivas e adequadas das fórmulas 9) ou seja das igualdades de Morgan.

Exemplo 9. Sejam quais forem os conjuntos A e B, vale a fórmula

$$A-(A-B)=A\wedge B, \tag{15}$$

com o caso particular

$$A-(A-B)=B \text{ se } B<A. \tag{15'}$$

Justificação de 15) e 15'). A fórmula 11), a propriedade involutiva da complementação, a fórmula 13), a segunda propriedade da complementação, o exemplo 4 e a propriedade absorvente da união permitem escrever

$$A-(A-B)=A\wedge(A-B)^{-}=A\wedge(A^{-}\vee B)=A\wedge B.$$

Deduzida assim a fórmula 15), o caso particular 15') é uma consequência imediata da propriedade absorvente da intersecção.

Exemplo 10. Escolhida arbitrariamente uma sequência ou sucessão decrescente formada por conjuntos A_n, então, seja qual for o valor particular k de n, vale a fórmula

$$\bigvee_{n\geqslant k}(A_k-A_n)=A_k-(\bigwedge_{n\geqslant 1}A_n), \text{ isto na hipótese } A_n\downarrow. \tag{16}$$

Justificação de 16). Se o índice m for o índice n redesignado, então a fórmula 10) permite escrever, quer se tenha $A_n\downarrow$ quer não se tenha isso, a relação

$$\bigwedge_{n\geqslant k}A_n=(\bigvee_{m\geqslant k}A_m)-\{\bigvee_{n\geqslant k}[(\bigvee_{m\geqslant k}A_m)-A_n]\}.$$

Caso se tenha $A_n\downarrow$, as propriedades absorventes da intersecção e da união dão

$$\bigwedge_{n\geqslant k}A_n=\bigwedge_{n\geqslant 1}A_n \quad \text{e} \quad \bigvee_{m\geqslant k}A_m=A_k,$$

pelo que fica

$$\bigwedge_{n\geq 1} A_n = A_k - [\bigvee_{n\geq k} (A_k - A_n)], \text{ isto na hipótese } A_n\downarrow.$$

Pela 3.ª propriedade da subtracção, tem-se $A_k - A_n \leq A_k$ para $n \geq k$, donde $\bigvee_{n\geq k} (A_k - A_n) \leq A_k$.† Posto isso, basta pôr $A = A_k$ e $B = \bigvee_{n\geq k} (A_k - A_n)$, donde $A - B = \bigwedge_{n\geq 1} A_n$, para que 15') se transforme em 16), c. q. d.

Exercício 12. Deduza as seguintes igualdades entre conjuntos:

$(A \vee B) - C = (A - C) \vee (B - C)$

(uma espécie de propriedade distributiva da subtracção);

$(A - C) \wedge (B - C) = (A \wedge B) - C$;

$(A - B) - C = A - (B \vee C)$;

$A - (B - C) = (A - B) \vee (A \wedge C)$.

Exercício 13. Deduza as seguintes igualdades entre conjuntos:

$(A - B) \wedge (C - D) = (A \wedge C) - (B \vee D)$;

$(A - B) - (C \wedge D) = [A - (B \vee C)] \vee [(A \wedge D^-) - B]$.

4. Conversão de uniões em adições

Na continuação do nosso estudo vai surgir, com certa frequência, a necessidade de converter a união dos conjuntos A_n duma sequência ou sucessão na *soma* dos conjuntos doutra se-

---

† Recorreu-se à seguinte propriedade, com alternativa: Caso $B_t \leq$ [ou $\geq$] B para cada t, então $\bigvee_t B_t \leq$ [ou $\bigwedge_t B_t \geq$] B. — Vale porque $I_{B_t} \leq$ [ou $\geq$] I_B para cada t implica $\sup_t I_{B_t} \leq$ [ou $\inf_t I_{B_t} \geq$] I_B.

quência ou sucessão, construídos a partir dos A_n por meio dum número finito ou duma infinidade numerável de intersecções e subtracções (que podem ser complementações). Nesta ordem de ideias, escolhidos arbitrariamente os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots,$ $A_n, \dots$ (em número finito ou infinito) e sendo $k_1, k_2, k_3, \dots, k_p, \dots$ uma permutação arbitrária dos números $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, vale a seguinte igualdade:

$$\dot{+}\, (A^{-}_{k_1} \wedge A^{-}_{k_2} \wedge A_{k_3}) \dot{+} \dots \dot{+} (A^{-}_{k_1} \wedge \dots \wedge A^{-}_{k_{p-1}} \wedge A_{k_p}) \dot{+} \dots, \tag{17}$$

cuja versão mais utilizada é a que corresponde a $k_n = n$ para cada n.

Justificação de 17). Atendendo às fórmulas 3) e 6'), reconhece-se que as parcelas do 2.º membro de 7'*) são, por ordem, as indicatrizes das parcelas do 2.º membro de 17). Se escolhermos arbitrariamente dois valores do índice p, digamos q e $r > q$, as correspondentes parcelas do 2.º membro de 7'*) formam um produto com o factor $I_{A_{k_q}} (1 - I_{A_{k_q}}) = 0$ e, portanto, as correspondentes parcelas do 2.º membro de 17) são conjuntos disjuntos, isto pelo teorema 5. Nesta conformidade, a fórmula 8) mostra que o 2.º membro de 7'*) é a indicatriz do 2.º membro de 17). Portanto, o teorema 3 permite ultimar a nossa justificação, c. q. d.

Passando para o caso particular em que $k_n = n$ para cada n e em que os conjuntos A_n crescem, as fórmulas 7"), 4) e 8) e o teorema 3 mostram que vale a fórmula especial

$$\begin{aligned} &A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n \vee \dots = A_1 \\ &\dot{+}\, (A_3 - A_2) \dot{+} \dots \dot{+} (A_n - A_{n-1}) \dot{+} \dots, \quad \text{isto na hipótese } A_n \uparrow. \end{aligned} \tag{17'}$$

Supondo que os conjuntos A_t são disjuntos dois a dois ao longo da família de índices T(t), o mesmo sucede ao longo de qualquer subfamília. Então, seja qual for a subfamília $T'(t')$ de $T(t)$, temos a seguinte fórmula auxiliar, por vezes bastante útil:

$$\dot{\sum_{t\neq t'}} A_t = (\dot{\sum_t} A_t) - (\dot{\sum_{t'}} A_{t'}), \qquad (18)$$

isto se os A_t forem disjuntos dois a dois.

Justificação de 18). Se igualarmos a A o diminuendo de 18) e se igualarmos a B o correspondente diminuidor, então a propriedade monotónica da adição dá $B \leqslant A$ e, portanto, a fórmula 4) e o teorema 4 dão $I_{A-B} = I_A - I_B$. † Posto isso, a fórmula 7) e o teorema 5 arrastam

$$I_{(\dot{\sum}_t A_t) - (\dot{\sum}_{t'} A_{t'})} = (\sup_t I_{A_t}) - (\sup_{t'} I_{A_{t'}}) = \sup_{t\neq t'} I_{A_t} = I_{\dot{\sum}_{t\neq t'} A_t},$$

pelo que o teorema 3 permite terminar a nossa justificação.

Vejamos agora outra fórmula baseada na ideia que nos levou a 17), mas de estrutura algo diferente. Com os mesmos conjuntos A_n usados em 17), vamos deduzir a relação

$$\bigvee_n A_n = \dot{\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}}^{*} (A_{1,p_1} \wedge A_{2,p_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p_n} \wedge \ldots), \qquad (19)$$

onde cada p_n assume os valores 1 e 2, sob a *reserva expressa* (pelo símbolo $\dot{\sum}^*$) de se omitir o caso $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \ldots = 2$, e onde, seja qual for n, vale a convenção $A_{n,1} = A_n$ e $A_{n,2} = A^-_n$.

Justificação de 19). A propriedade absorvente da intersecção, as fórmulas 8') e 13') e as propriedades comutativa e associativa da adição permitem escrever

$$\Omega = \Omega \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega \wedge \ldots = \bigwedge_n (\dot{\sum_{p_n}} A_{n,p_n}) = (\bigwedge_n A^-_n) \dot{+}$$

$$\dot{+} [\dot{\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}}^{*} (A_{1,p_1} \wedge A_{2,p_2} \wedge \ldots \wedge A_{n,p_n} \wedge \ldots)].$$

---

† Incidentemente, fica provado que $B \leqslant A$ implica $I_{A-B} = I_A - I_B$.

Em seguida, a fórmula 18), com diminuendo igual a Ω e com diminuidor igual a $\underset{n}{\wedge} A_n^-$, permite ultimar a dedução, se tomarmos em conta a 1.ª propriedade da subtracção e a fórmula 9a).

Observação. Recordando a observação posta a seguir às fórmulas 13), podemos afirmar o seguinte: ou há uma infinidade de conjuntos A_n e as parcelas-intersecção do 2.º membro de 19) formarão um conjunto com a potência do contínuo; ou há um número finito M de conjuntos A_n e as parcelas-intersecção do 2.º membro de 19) formarão um conjunto finito com (2^M-1) elementos.

Fechamos com um *estudo comparativo dos segundos membros de* 17) *e de* 19).

a) *Caso do segundo membro de* 17). O conjunto das parcelas tem, em todos os casos, a mesma potência (finita ou infinita) que o conjunto das parcelas do correspondente 1.º membro. Cada uma das parcelas do 2.º membro tem conjuntos secantes em número igual ao seu número de ordem e, além disso, a soma do 2.º membro é em geral muito sensível a permutações dos índices. Acresce que o leitor poderá achar conveniente verificar que, escolhido $p>1$, em geral não há soma parcial igual a A_{k_p}; veja-se, por exemplo, o caso $p=2$ e $O \neq A_{k_2}$ propriamente contido em A_{k_1}.

b) Caso do segundo membro de 19). Ponhamos de lado o caso em que há um só valor assumido por n, um caso manifestamente destituído de interesse. Então, há «mais» parcelas no 2.º membro do que no 1.º: ou porque são em número de 2^M-1 e M ou porque apresentam as potências do contínuo e do numerável. Cada uma das parcelas do 2.º membro tem conjuntos secantes em número igual ao número de parcelas do 1.º membro. Por outro lado, a soma do 2.º membro é insensível a quaisquer permutações dos índices $1, 2, \ldots, n, \ldots$ (pelas propriedades comutativas da intersecção e da união). Por fim, o leitor pode verificar que, escolhido um valor n' de n, o conjunto $A_{n'}$ do 1.º membro é uma soma parcial do 2.º membro, a saber a soma parcial que se obtém suprimindo as parcelas em que $p_{n'} = 2$.

5. **Limites de conjuntos**

No n.º final do §5 vamos trabalhar com *sucessões* de conjuntos $A_n \leqslant \Omega (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dada uma tal sucessão, tem interesse considerar os conjuntos, digamos B e C, definidos como segue:

$$B = \bigvee_{n \geqslant 1} \left(\bigwedge_{m \geqslant n} A_m \right) = \underline{\lim}_{n \to +\infty} A_n \quad \text{e} \quad C = \bigwedge_{n \geqslant 1} \left(\bigvee_{m \geqslant n} A_m \right) = \overline{\lim}_{n \to +\infty} A_n \tag{20}$$

a que vamos chamar, respectivamente, *sublimite mínimo* e *sublimite máximo*, em ambos os casos da sucessão formada pelos conjuntos A_n.

Atendendo às fórmulas 7) e 6), é óbvio que vale

$$I_B = \sup_{n \geqslant 1} \left(\inf_{m \geqslant n} I_{A_m} \right) \quad \text{e} \quad I_C = \inf_{n \geqslant 1} \left(\sup_{m \geqslant n} I_{A_m} \right). \tag{21}$$

Escolhido arbitrariamente um ponto ω, cada número

$$\inf_{m \geqslant n} I_{A_m}(\omega) \; [\text{ou} \; \sup_{m \geqslant n} I_{A_m}(\omega)]$$

é o valor assumido por uma das indicatrizes $I_{A_n}(\omega)$, $I_{A_{n+1}}(\omega)$, $I_{A_{n+2}}(\omega), \ldots$, com índice numérico o mais baixo possível, valor esse que cresce [ou decresce] (quando n cresce) e logo tende para um limite igual ao respectivo supremo [ou ínfimo]. Por outras palavras, seja qual for ω, o número $I_B(\omega)$ [ou $I_C(\omega)$] é um sublimite da sucessão formada pelos números $I_{A_n}(\omega)$ e, portanto, a função I_B[ou I_C], de domínio Ω, é um sublimite da sucessão formada pelas funções I_{A_n}. Ora, caso se tenha $I_B(\omega)=1$ [ou $I_C(\omega)=$ $=0$], resulta $\inf\limits_{m\geqslant n'} I_{A_m}(\omega)=1$ [ou $\sup\limits_{m\geqslant n'} I_{A_m}(\omega)=0$] para um certo valor n' de n, donde $I_{A_m}(\omega)=1$ [ou $=0$] para todo o $m\geqslant n'$; por isso, o sublimite encontrado é o sublimite mínimo [ou máximo] da sucessão formada pelas indicatrizes I_{A_n}, facto esse que se regista através da fórmula

$$I_B = \underline{\lim}_{n\to+\infty} I_{A_n} \quad \text{e} \quad I_C = \overline{\lim}_{n\to+\infty} I_{A_n}, \tag{22}$$

a qual corrobora a justeza das designações atribuídas aos conjuntos B e C.

Posto isso, a fórmula 22), a desigualdade óbvia

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} I_{A_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} I_{A_n},$$

o teorema 4 e a fórmula 20) mostram que

$$B \leqslant C \quad \text{ou} \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n. \tag{23}$$

Observação. Atendendo a 21), reconhece-se que $I_B(\omega)$ assume o valor 1 se e só se existir um n' tal que $\inf\limits_{m\geqslant n'} I_{A_m}(\omega)=1$, quer dizer tal que $I_{A_{n'}}(\omega)=I_{A_{n'+1}}(\omega)=I_{A_{n'+2}}(\omega)=\ldots=1$. Por outro lado, $I_C(\omega)$ assume o valor 1 se e só se $\sup\limits_{m\geqslant n} I_{A_m}(\omega)=1$ para todo o n, quer dizer se e só se houver uma infinidade de valores de n para os quais $I_{A_n}(\omega)=1$. Daí uma nova caracterização dos conjuntos B e C, a saber: B *é o conjunto formado pelos pontos* ω *tais que cada um deles pertence a todos os* A_n, *com possível excepção dum número finito;* C *é o conjunto formado pelos pontos* ω *tais que cada um deles pertence a uma infinidade de* A_n.

Caso se tenha $B=C$ e somente neste caso, não só representamos o conjunto comum por $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=A$, como também chamamos a A *limite* da sucessão formada pelos conjuntos A_n (a qual se classifica como *convergente* para A).

Atendendo ao teorema 3 e às fórmulas 20) e 22), reconhece-se imediatamente que o *limite* A *aqui definido existe se e só se existir* $\lim_{n\to+\infty} I_{A_n}$ *(função comum a* I_B *e a* I_C*), caso este em que o último limite coincide com* I_A.

Vejamos agora algumas propriedades da passagem ao limite em sucessões de conjuntos.

1.ª propriedade: «Caso a sucessão formada pelos conjuntos A_n seja crescente [ou decrescente], o seu limite existe e coincide com $\bigvee_n A_n$ [ou $\bigwedge_n A_n$].» — Com efeito, a hipótese $A_n\uparrow$[ou $\downarrow$] institui as indicatrizes I_{A_n} em sucessão crescente [ou decrescente], pelo que existe $\lim_{n\to+\infty} I_{A_n} = \sup_n I_{A_n}$ [ou $\inf_n I_{A_n}$] $= I_{\bigvee_n A_n}$ [ou $I_{\bigwedge_n A_n}$] (fórmulas 7) e 6)). Logo existe $\lim_{n\to+\infty} A_n = A = \bigvee_n A_n$ [ou $\bigwedge_n A_n$].

Propostas duas sucessões, uma formada por conjuntos A_n e outra formada por conjuntos B_n, elas dizem-se *disjuntas* (entre si) se e só se A_n for disjunto de B_n para cada n. Nesta conformidade, temos

2.ª propriedade: «Escolhidas arbitrariamente duas sucessões disjuntas e ambas convergentes, os respectivos limites resultam também disjuntos.» — Com efeito, existem, por hipótese,

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} B_n = B,$$

com A_n e B_n a representar os termos genéricos das duas sucessões.

Logo existem

$$\lim_{n\to+\infty} I_{A_n} = I_A \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} I_{B_n} = I_B.$$

Também, por hipótese, $I_{A_n} I_{B_n}=0$ para cada n (teorema 5). Portanto, $I_A\, I_B = 0$ e a tese segue.

Exercício 14. Escolhida arbitrariamente uma sucessão de conjuntos A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, mostre que:

a) os seus sublimites mínimo e máximo não se alteram se modificarmos um número fiinto de termos da sucessão;

b) valem as igualdades $(\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n)^- = \underline{\lim_{n \to +\infty}} A_n^-$

e $(\underline{\lim_{n \to +\infty}} A_n)^- = \overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n^-$;

c) seja qual for o conjunto B, tem-se

$$B - (\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n) = \underline{\lim_{n \to +\infty}} (B - A_n)$$

e

$$B - (\underline{\lim_{n \to +\infty}} A_n) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} (B - A_n).$$

Exercício 15.

a) Se os conjuntos $A_n(n=1, 2, 3, \ldots)$ forem disjuntos dois a dois, então $\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n = O = \lim_{n \to +\infty} A_n$;

b) caso se tenha $A_n = A$ para n par e $A_n = B$ para n ímpar, resulta $\underline{\lim_{n \to +\infty}} A_n = A \wedge B$ e $\overline{\lim_{n \to +\infty}} A_n = A \vee B$;

c) se Ω for o espaço formado pelos números reais, ponha

$A_n = \{0 < \omega < 1 - \frac{1}{n}\}$ para n par e $A_n = \{\frac{1}{n} < \omega < 1\}$ para n ímpar e, em seguida, mostre que a sucessão assim definida é convergente sem ser monotónica.

Exercício 16. Dadas duas sucessões convergentes, uma formada por conjuntos A_n e outra formada por conjuntos $B_n(n=1,2,3,\ldots)$, mostre que:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^- = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n)^-$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n - B_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) - (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n)$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n \Delta B_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) \Delta (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n)$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n \wedge B_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) \wedge (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n)$;

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n \vee B_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) \vee (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n)$;

f) caso as sucessões dadas sejam disjuntas, $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n \dot{+} B_n) =$

$= (\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) \dot{+} (\lim\limits_{n\to+\infty} B_n)$

OPERAÇÕES EXTERNAS

§ 6 — A OPERAÇÃO DE RESTRIÇÃO

1. Generalidades

Dum modo geral e nomeadamente em questões de medida e de probabilidade, não é raro haver necessidade, por um lado, de trabalhar simultaneamente com conjuntos contidos em espaços que variam duns conjuntos para outros e haver necessidade, por outro lado, de relacionar tais conjuntos por meio de operações adequadas, a que vamos chamar *externas* (porque não nos permitem permanecer dentro dum espaço único).

Neste parágrafo vamos começar por uma operação externa que tem a peculiaridade de se apoiar apenas em dois espaços, tomados por ordem, sendo o segundo espaço condicionado pelo primeiro.

Dado o espaço $\Omega(\omega)$, abreviadamente Ω, considere-se um conjunto *fixo e não-vazio* $\Omega' \leqslant \Omega$, de ponto genérico ω', e institua-se esse conjunto em novo espaço $\Omega'(\omega')$, este emanado de Ω, pelo que o classificamos como *subespaço* de Ω. Recorremos ao símbolo Ω/Ω' para representar um tal subespaço. Esta notação inclui o caso particular do subespaço (impróprio) Ω/Ω ou seja do espaço original considerado como subespaço de si mesmo. No caso geral, o subespaço, suposto utilizável, será em princípio tanto mais vantajoso quanto mais amplo for Ω'^{-} ou seja o conjunto dos pontos ω omitidos na passagem para o subespaço.

Escolhido arbitrariamente um conjunto $A \leqslant \Omega$, sabemos que $A \wedge \Omega' \leqslant \Omega'$ e, por isso, podemos passar a intersecção $A \wedge \Omega'$ para conjunto contido em Ω/Ω' e, como tal, representá-la pelo novo símbolo A/Ω' que vamos ler: ou A *dado* Ω' ou A *sob a condição* Ω' ou A *na hipótese* Ω' ou *restrição de* A *a* Ω'. *Quanto à última designação, usamo-la também para referir a operação que converte* A *em* A/Ω'. Note-se que A/Ω designa o conjunto inicial A na nova notação.

Observação. As diversas denominações do conjunto A/Ω' foram escolhidas no intuito de adaptá-las o melhor possível a algumas situações concretas bastante frequentes.

Posto isso, seja qual for a função $f(\omega)$ do tipo referido no n.º 1 do § 2, vamos representar por $[f(\omega)]_{\omega=\omega'}$ ou, abreviadamente, por $(f)_{\omega=\omega'}$ ou, ainda mais abreviadamente, por $f(\omega')$ a *subfunção* que se obtém a partir de $f(\omega)$ *restringindo o domínio* Ω *a* Ω', como quem diz passando do espaço Ω para o subespaço Ω/Ω'.† Nesta conformidade, vale a seguinte relação entre as indicatrizes de A e de A/Ω':

$$I_{A/\Omega'}(\omega') \equiv I_{A\wedge\Omega'}(\omega') \quad \text{ou} \quad I_{A/\Omega'} = (I_{A\wedge\Omega'})_{\omega=\omega'}. \tag{24}$$

Justificação de 24). Caso ω' confira o valor 1 [ou 0] ao 1.º membro, resulta $\omega' \varepsilon A\wedge\Omega'$ [ou $(A\wedge\Omega')^-$], donde o valor 1 [ou 0] para $I_{A\wedge\Omega'}$, c. q. d.

Note-se que todo o ponto $\omega\varepsilon\Omega'^-$ está fora do domínio de $I_{A/\Omega'}$ e atribui o valor 0 a $I_{A\wedge\Omega'}$; por outras palavras, $I_{A/\Omega'}$ não existe em Ω'^- e $I_{A\wedge\Omega'}$ anula-se identicamente em Ω'^-.

2. **Propriedades**

Vejamos agora as principais propriedades da operação de restrição. Em todas elas, as letras latinas maiúsculas (eventualmente afectadas de índices) designam conjuntos contidos em Ω.

---

† A esta subfunção chama-se também *restrição de* $f(\omega)$ *a* Ω'.

Para começar, temos a fórmula

a) $A/\Omega' = B/\Omega'$ se e só se $A \wedge \Omega' = B \wedge \Omega'$; (25)

b) caso se tenha $B \geqslant \Omega'$, então $(A \wedge B)/\Omega' = A/\Omega'$;

c) caso se tenha $\Omega' \geqslant \Omega'' \neq O$, então $(A/\Omega')/\Omega'' = A/\Omega''$.

Justificação de 25). Pode fazer-se à custa de 24). Vejamos:

a) $A/\Omega' = B/\Omega'$ é equivalente a $I_{A\wedge\Omega'}(\omega') \equiv I_{B\wedge\Omega'}(\omega')$, por sua vez equivalente a $I_{A\wedge\Omega'}(\omega) \equiv I_{B\wedge\Omega'}(\omega)$ e logo a $A \wedge \Omega' = B \wedge \Omega'$;

b) atendendo a *a*), basta provar $A \wedge \Omega' = (A \wedge B) \wedge \Omega' = A \wedge (B \wedge \Omega')$, uma relação óbvia quando $B \geqslant \Omega'$;

c) sendo ω'' o ponto genérico de Ω'', qualquer ω'' será ω', resulta $I_{A/\Omega''}(\omega'') \equiv I_{A\wedge(\Omega'\wedge\Omega'')}(\omega'') \equiv I_{(A\wedge\Omega')/\Omega''}(\omega'') \equiv$
$\equiv I_{(A/\Omega')/\Omega''}(\omega'')$ e a tese segue.

Vejamos agora uma fórmula cuja primeira parte trata da *passagem do símbolo* $\leqslant$ entre dois conjuntos de Ω para as respectivas restrições a Ω', cuja segunda parte refere a *propriedade distributiva da restrição com respeito à subtracção* e cuja parte final permite *permutar operações de restrição,* todas a Ω', *com complementações,* uma com respeito a Ω e outra com respeito a Ω/Ω'.

a) $A \leqslant B \Rightarrow A/\Omega' \leqslant B/\Omega'$; (26)

b) $(A-B)/\Omega' = (A/\Omega') - (B/\Omega')$;

c) $(B^-)/\Omega' = (B/\Omega')^-$.

Justificação de 26).

a) Atendendo ao teorema 4 e às fórmulas 6') e 24), a tese decorre de $I_A \leqslant I_B \Rightarrow I_A I_{\Omega'} \leqslant I_B I_{\Omega'} \Rightarrow I_{A/\Omega'} \leqslant I_{B/\Omega'}$;

b) atendendo às fórmulas 24), 12) e 4), a tese decorre de $I_{(A-B)/\Omega'}(\omega') \equiv I_{(A\wedge\Omega')-(B\wedge\Omega')}(\omega') \equiv I_{A/\Omega'}(\omega')[1-I_{B/\Omega'}(\omega')] \equiv$ $\equiv I_{(A/\Omega')-(B/\Omega')}(\omega')$;

c) resulta de *b*) pondo $A = \Omega$.

Por fim, uma fórmula que refere as *propriedades distributivas da restrição com respeito à intersecção, à união e à adição,* na qual figura um índice t a percorrer uma família T:

$$a)\ (\bigwedge_{t\in T} A_t)/\Omega' = \bigwedge_{t\in T} (A_t/\Omega'); \qquad (27)$$

$$b)\ (\bigvee_{t\in T} A_t)/\Omega' = \bigvee_{t\in T} (A_t/\Omega');$$

c) caso os conjuntos A_t sejam disjuntos dois a dois,
$$(\dot{\sum_{t\in T}} A_t)/\Omega' = \dot{\sum_{t\in T}} (A_t/\Omega').$$

Justificação de 27).

a) Atendendo às fórmulas 24) e 6) e às propriedades 1.ª, 2.ª e 4.ª da intersecção, a tese decorre de

$$I_{(\bigwedge_t A_t)/\Omega'}(\omega') \equiv I_{\bigwedge_t (A_t \wedge \Omega')}(\omega') \equiv \inf_t I_{A_t/\Omega'}(\omega') \equiv I_{\bigwedge_t (A_t/\Omega')}(\omega');$$

b) atendendo às fórmulas 24), 13) † e 7), serve o cálculo de *a*), com $\bigvee_t$ em lugar de $\bigwedge_t$ e com $\sup_t$ em lugar de $\inf_t$;

† Na versão $(\bigvee_t A_t) \wedge \Omega' = \bigvee_t (A_t \wedge \Omega')$, com t em lugar de $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, cuja justificação pode ficar ao cuidado do leitor.

c) basta justificar a disjunção duas a duas entre as parcelas do segundo membro, o que se faz como segue: sejam quais forem as determinações t^* e $t^{**} \neq t^*$ do índice t, a hipótese de 27c) e o teorema 5 dão $I_{A_{t^*}}(\omega) \cdot I_{A_{t^{**}}}(\omega) \equiv 0$, donde, atendendo à fórmula 24), à 3.ª propriedade da intersecção e à 1.ª propriedade do n.º **4** do § 2, a relação $I_{A_{t^*}/\Omega'}(\omega') \cdot$ $\cdot I_{A_{t^{**}}/\Omega'}(\omega') \equiv 0$, c. q. d.

Exemplo 11. Na alínea *c*) da justificação de 27) recorreu-se à 1.ª propriedade do n.º **4** do § 2, a qual não funciona em sentido inverso. Por isso, é perfeitamente possível que as restrições A_{t^*}/Ω' e $A_{t^{**}}/\Omega'$ sejam disjuntas sem que o sejam os conjuntos A_{t^*} e $A_{t^{**}}$. O leitor pode exemplificar com o caso $\Omega = \{1,2,3\}$, $\Omega' = \{1,2\}$, $A_1 = \{1,3\}$ e $A_2 = \{2,3\}$.

Exercício 17. Deduza a relação $(A \vartriangle B)/\Omega' = (A/\Omega') \vartriangle (B/\Omega')$ (*propriedade distributiva da restrição com respeito à subtracção simétrica).* Para o efeito, aconselha-se o uso das fórmulas 5) e 24) e do exercício 11.

Exercício 18. Mostre, através dum exemplo, que a relação $=$ [ou $\leqslant$] entre duas restrições a Ω' nem sempre impõe a relação análoga entre os conjuntos restringidos.

§ 7 — MULTIPLICAÇÃO (CARTESIANA). ESPAÇOS REAIS

1. Generalidades

Neste parágrafo vamos tratar dum tipo de operação externa sobre conjuntos contidos em espaços diferentes em que estes podem ser em número superior a 2 e escusam de ter qualquer ligação entre si.

Dada a sequência ou sucessão formada pelos espaços $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$, com pontos genéricos respectivamente $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, ou seja dados os espaços $\Omega_1(\omega_1), \Omega_2(\omega_2), \ldots, \Omega_n(\omega_n), \ldots$, representemos por $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) = \omega$ todo o *agrupamento ordenado* composto por pontos tais que o primeiro pertence a Ω_1, o segundo pertence a Ω_2, etc., o n-ésimo pertence a Ω_n, etc. Escolhido qualquer um desses agrupamentos ω, não só podemos interpretá-lo como ponto do espaço Ω formado por todos os agrupamentos admissíveis, como também podemos classificar os pontos agrupados como *coordenadas* do ponto ω em causa, sendo ω_1 a *primeira coordenada,* ω_2 a *segunda coordenada,* etc., ω_n a *n-ésima coordenada,* etc.

Posto isso, sejam quais forem os conjuntos $A_1 \leqslant \Omega_1, A_2 \leqslant \Omega_2, \ldots, A_n \leqslant \Omega_n, \ldots$, façamos corresponder, no espaço Ω, o conjunto A formado pelos pontos ω tais que $\omega_1 \varepsilon A_1, \omega_2 \varepsilon A_2, \ldots, \omega_n \varepsilon A_n, \ldots$, conjunto esse obviamente não-vazio se não houver nenhum A_n vazio e naturalmente igual ao vazio $O \leqslant \Omega$ se, para algum n, o correspondente A_n for o vazio $O_n \leqslant \Omega_n$.

Vamos representar o conjunto A assim definido através da igualdade simbólica

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots \qquad (28)$$

ou, abreviadamente, $A = \underset{n}{\times} A_n$

e vamos chamar a A *produto cartesiano* ou, mais simplesmente, *produto* dos conjuntos A_n, tomados por ordem, passando estes a ser *factores,* com A_1 instituído em *primeiro factor,* A_2 instituído em *segundo factor,* etc., A_n instituído em n-*ésimo factor,* etc. Por outro lado, vamos chamar *multiplicação cartesiana* ou, mais simplesmente, *multiplicação* à operação que converte os conjuntos A_n, tomados por ordem, em A.

Nada impede que se identifique cada um dos factores A_n de 28) com o corespondente espaço Ω_n. Neste caso, os possíveis pontos ω do produto A são todos os pontos do espaço Ω atrás definido, pelo que 28) toma o aspecto particular

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \times \ldots \qquad (28')$$

ou, abreviadamente, $\Omega = \underset{n}{\times} \Omega_n$,

o qual justifica que se classifique Ω como *espaço-produto* e cada Ω_n como *espaço-factor.*

Também se pode identificar cada um dos factores A_n de 28) com um conjunto elementar $\{\omega_n\}$ e obter assim um produto A formado pelo único ponto $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$. Neste caso 28) toma o aspecto

$$\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)\} = \underset{n}{\times} \{\omega_n\}. \qquad (28'')$$

Talvez convenha acrescentar que as considerações precedentes parecem pressupor um mínimo de dois factores; todavia, ganhamos em flexibilidade se convencionarmos que qualquer conjunto contido num espaço dado coincide com o *produto* (*degenerado*) de que esse conjunto é o único factor.

Observação. Retomemos a fórmula 28), representemos por $\propto$ o número de pontos do produto A, representemos por $\propto_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ o número de pontos do factor A_n e introduzamos a *convenção, muito frequente em questões de medida,* de atribuir o valor 0 a todo o produto de números que tenha um factor igual a 0 (*mesmo que haja factores infinitos*). Nesta conformidade, a fórmula 28) impõe a seguinte igualdade entre números

$$\propto = \propto_1 \cdot \propto_2 \dots \propto_n \dots \tag{28*}$$

ou, abreviadamente, $\propto = \prod\limits_n \propto_n$.

Esta fórmula torna porventura mais plausível a nomenclatura por nós introduzida a propósito dos conjuntos A e A_n.

É óbvio que cada conjunto-factor A_n tem a sua indicatriz $I_{A_n}(\omega_n)$, abreviadamente I_{A_n}, e que o conjunto-produto A tem a indicatriz $I_A(\omega) = I_A((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots))$, em escrita simplificada $I_A(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ ou somente I_A, onde, não o esqueçamos, A se sujeita à fórmula 28). Posto isso, vale a seguinte relação entre indicatrizes:

$$I_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \dots}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \equiv$$

$$\equiv I_{A_1}(\omega_1) \cdot I_{A_2}(\omega_2) \dots I_{A_n}(\omega_n) \dots \tag{29}$$

ou

$$I_{\underset{n}{\times} A_n}(\omega) \equiv \prod_n I_{A_n}(\omega_n)$$

ou ainda

$$I_{\underset{n}{\times} A_n} = \prod_n I_{A_n},$$

conforme quisermos interpretar a relação como identidade nos argumentos ou como igualdade entre funções.

Justificação de 29). Em qualquer das versões de 29), um $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ que confira o valor 1 ao primeiro membro dá $\omega_n \varepsilon A_n$ para cada n e, portanto, atribui o valor 1 ao segundo membro. Este raciocínio funciona também no sentido do segundo membro para o primeiro, pelo que um primeiro membro com o valor 0 conduz a um segundo membro também com o valor 0, c. q. d.

2. Propriedades

No que segue, seja qual for o valor de n, qualquer letra latina maiúscula com primeiro índice n designa um conjunto contido no espaço-factor Ω_n.

Comecemos por um teorema que apresenta a curiosidade de ser falso o seu homólogo que se obtém, substituindo o sinal $\leqslant$ pelo sinal $\leqslant$ e substituindo a multiplicação de conjuntos não-vazios pela multiplicação de números significativos.

Teorema *6.* «Dados dois conjuntos-produtos $\underset{n}{\times} A_n$ e $\underset{n}{\times} B_n$, o último não-vazio, tem-se a relação $\underset{n}{\times} B_n \leqslant \underset{n}{\times} A_n$ se e só se valer $B_n \leqslant A_n$ para cada n.»

Demonstração. Atendendo à fórmula 29) e ao teorema 4, basta provar que se tem a relação $\prod_n I_{B_n} \leqslant \prod_n I_{A_n}$ se e só se valer $I_{B_n} \leqslant I_{A_n}$ para cada n, isto na hipótese de nenhuma função I_{B_n} se reduzir à constante 0. Ora $I_{B_n} \leqslant I_{A_n}$ para cada n implica $\prod_n I_{B_n} \leqslant \prod_n I_{A_n}$ (mesmo que $I_{B_n} = 0$ para algum n). Por outro lado, se $0 \neq \prod_n I_{B_n} \leqslant$ $\leqslant \prod_n I_{A_n}$, então, seja qual for n, qualquer ponto ω'_n tal que $I_{B_n}(\omega'_n) = 1$ dá, atendendo à definição de $\underset{n}{\times} B_n$, origem a um ponto $\omega' =$ $= (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n, \dots)$ tal que $I_{B_1}(\omega'_1) = I_{B_2}(\omega'_2) = \dots = I_{B_n}(\omega'_n) =$ $= \dots = 1$, facto este que impõe a igualdade $I_{A_n}(\omega'_n) = 1$ e logo impede que falhe a desigualdade entre funções $I_{B_n} \leqslant I_{A_n}$, c. q. d.

Corolário 6'. «Dados dois conjuntos-produtos $\underset{n}{\times} A_n$ e $\underset{n}{\times} B_n$, ambos não-vazios, tem-se a relação $\underset{n}{\times} B_n = \underset{n}{\times} A_n$ se e só se valer $B_n = A_n$ para cada n.»

Demonstração. Tendo em conta o teorema 1, vale $\underset{n}{\times} B_n = \underset{n}{\times} A_n$ se e só se valer simultaneamente $\underset{n}{\times} B_n \leqslant \underset{n}{\times} A_n$ e $\underset{n}{\times} A_n \leqslant \underset{n}{\times} B_n$ ou, pelo teorema 6, se e só se valer simultaneamente $B_n \leqslant A_n$ e $A_n \leqslant B_n$, isto para cada n, donde a tese.

Vejamos agora as *principais propriedades da multiplicação cartesiana.*

1.ª propriedade ou propriedade distributiva (à direita e à esquerda) *da multiplicação com respeito à subtracção,* traduzida através da fórmula

$$a)\ (A_1 - B_1) \times A_2 = (A_1 \times A_2) - (B_1 \times A_2); \tag{30}$$

$$b)\ A_1 \times (A_2 - B_2) = (A_1 \times A_2) - (A_1 \times B_2).$$

Justificação de 30). Atendendo às fórmulas 4) e 29) e ao teorema 2, a relação *a*) decorre de

$$I_{(A_1 - B_1) \times A_2} = I_{A_1} (1 - I_{B_1}) I_{A_2} =$$

$$= I_{A_1} I_{A_2} (1 - I_{B_1} I_{A_2}) = I_{(A_1 \times A_2) - (B_1 \times A_2)} .$$

A justificação de *b*) é muito semelhante à de *a*) e pode ficar ao cuidado do leitor.

Em seguida, vamos admitir que o primeiro índice n toma os valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$, com N fixo, e que, escolhido n, o segundo índice p_n toma todos os valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant p_n < P_n \leqslant +\infty$, com cada P_n fixo. Nesta conformidade, vale a *propriedade distributiva da multiplicação com respeito à união,* expressa através da fórmula

$$\underset{n}{\times} (\underset{p_n}{V} A_{n,p_n}) = \underset{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots}{V} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \ldots \times A_{n,p_n} \times \ldots), \qquad (31)$$

semelhante à fórmula 13), a partir da qual se obtém 31), substituindo formalmente cada símbolo de intersecção de conjuntos pelo correspondente símbolo de multiplicação cartesiana. Pode acrescentar-se que as considerações relativas à potência do conjunto formado pelas parcelas do segundo membro de 13), desenvolvidas na observação que se segue a 13"), se adaptam perfeitamente à potência do conjunto formado pelas parcelas do segundo membro de 31). Todavia, falta proceder a

Justificação de 31). Atendendo às fórmulas 29) e 7), a relação 31) decorre da igualdade entre indicatrizes

$$\prod_{n} (\sup_{p_n} I_{A_{n,p_n}}) = \sup_{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots} (I_{A_{1,p_1}} \cdot I_{A_{2,p_2}} \ldots I_{A_{n,p_n}} \ldots),$$

esta última fácil de verificar.

Passemos para o caso particular de 31) em que, seja qual for n, os conjuntos A_{n,p_n} se apresentam disjuntos dois a dois (sempre que $P_n > 2$). Neste caso, vale a *propriedade distributiva da multiplicação com respeito à adição,* que se obtém particularizando 31) para

$$\underset{n}{\times} (\dot{\sum_{p_n}} A_{n,p_n}) = \dot{\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots}} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \ldots \times A_{n,p_n} \times \ldots). \qquad (31')$$

Justificação de 31'). Basta provar que a nossa hipótese de disjunção, relativa ao primeiro membro de 31), força as parcelas do segundo membro de 31) a serem disjuntas duas a duas. Ora, se

$$A_{1,p'_1} \times A_{2,p'_2} \times \ldots \times A_{n,p'_n} \times \ldots$$

e

$$A_{1,p''_1} \times A_{2,p''_2} \times \ldots \times A_{n,p''_n} \times \ldots$$

forem duas parcelas distintas, tiradas do segundo membro de 31), então existe pelo menos um $k \geqslant 1$ tal que $p'_k \neq p''_k$, donde, atendendo ao teorema 5, a relação $I_{A_{k,p'_k}} \cdot I_{A_{k,p''_k}} = 0$, a qual implica um produto identicamente nulo para as indicatrizes das duas parcelas referidas e logo implica a disjunção entre essas parcelas.

Seguem algumas aplicações das fórmulas 31) e 31'). Em primeiro lugar, temos o

Teorema 7. «Sendo n e p índices com valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$ e $1 \leqslant p < P \leqslant +\infty$, com N e P fixos, considerem-se, seja qual for n, um conjunto $A_n \leqslant \Omega_n$ e conjuntos não-vazios $A_{n,p} \leqslant \Omega_n$. Então, a hipótese $\underset{n}{\times} A_n = \underset{p}{V} (\underset{n}{\times} A_{n,p})$ implica que valha a relação $A_n = \underset{p}{V} A_{n,p}$ para cada n.»

Demonstração. Escolhido arbitrariamente o valor de p, a hipótese do enunciado, a propriedade monotónica da união e o teorema 6 dão, seja qual for n, a relação $A_n \geqslant A_{n,p}$, donde (atenda-se à nota posta a propósito da justificação da fórmula 16)) a relação $\underset{n}{V} A_{n,p} \leqslant A_n \neq O_n$, válida para qualquer n. Por outro lado, a fórmula 31), a propriedade monotónica supracitada e a hipótese do enunciado conduzem a

$$\underset{n}{\times} (\underset{p}{V} A_{n,p}) = \underset{n}{\times} (\underset{p_n}{V} A_{n,p_n}) \geqslant \underset{p}{V} (\underset{n}{\times} A_{n,p}) = \underset{n}{\times} A_n \dagger;$$

† Particularizou-se pondo $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \ldots = p$.

logo o teorema 6 dá $\overset{V}{\underset{p}{}} A_{n,p} \geqslant A_n$ para cada n. Agora a tese decorre do teorema 1.

Em seguida, vamos apresentar um caso particular de 31'), com um pequeno aditamento. Supondo $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$, com N fixo, e fazendo $P_n = 3$, para cada n, *as convenções de pôr* $A_{n,1} \dot{+} A_{n,2} = A_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *e de* $\dot{\Sigma}^*$ *se estender a todas as disposições dos índices* $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, *com a única excepção do caso* $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \ldots = 2$, *são convenções que nos permitem estabelecer a fórmula*

$$(\underset{n}{\times} A_n) - (\underset{n}{\times} A_{n,2}) = \underset{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}{\dot{\Sigma}^*} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \ldots \times A_{n,p_n} \times \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant \underset{n}{V} (A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_{n,1} \times A_{n+1} \times \ldots) \qquad (31'^*)$$

onde se subentende que $1 \leqslant p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \leqslant 2$ e que devem fazer-se as adaptações notacionais adequadas no caso (inevitável) em que $A_{n,1}$ vem a ser o 1.º factor do produto final e também no caso (eventual) em que $A_{n,1}$ vem a ser o último factor desse produto.

Justificação de 31').* Estamos a considerar o caso particular de 31) em que, seja qual for n, os conjuntos A_{n,p_n} são disjuntos dois a dois e, além disso, cada índice p_n assume apenas os valores 1 e 2. Nesta conformidade, a fórmula 31'), as convenções tomadas e as propriedades comutativa e associativa da adição de conjuntos dão a relação

$$\underset{n}{\times} A_n = [\underset{n}{\times} A_{n,2}] \dot{+} [\underset{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}{\dot{\Sigma}^*} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \ldots \times A_{n,p_n} \times \ldots)],$$

da qual se tira a igualdade de 31'*) tendo em conta a fórmula 18).

Posto isso, as fórmulas 7) e 6') e o teorema 4 mostram que a parte final de 31'*) é equivalente à desigualdade

$$\underset{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}{\sup{}^*} (I_{A_{1,p_1}} \cdot I_{A_{2,p_2}} \ldots I_{A_{n,p_n}} \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n [(\sup_{p_1} I_{A_{1,p_1}}) \ldots (\sup_{p_{n-1}} I_{A_{n-1,p_{n-1}}}) \cdot I_{A_{n,1}} \cdot (\sup_{p_{n+1}} I_{A_{n+1,p_{n+1}}}) \ldots],$$

onde sup* representa o supremo correspondente a $\dot{\Sigma}$* e onde a desigualdade só pode falhar se existir um ponto $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ do espaço-produto que atribua o valor 1 ao primeiro membro e o valor 0 ao outro. Um tal ponto ω determinaria valores particulares dos índices do tipo p— digamos $p'_1, p'_2, \dots, p'_n, \dots$ — tais que $p'_\nu = 1$ (ν um valor particular de n) e que

$$I_{A_{1,p'_1}}(\omega_1) = I_{A_{2,p'_2}}(\omega_2) = \dots = I_{A_{n,p'_n}}(\omega_n) = \dots = 1,$$

donde o valor 1 para o mesmo ponto ω e o elemento número ν abrangido por $\sup_n$, uma conclusão manifestamente absurda, c.q.d.

Exemplo 12. Um caso especial de 31'*) é o de se ter $A_n = \Omega_n$ para cada n. Neste caso, a fórmula 18), a 1.ª propriedade da subtracção e a fórmula 28') mostram que $A_{n,2} = A^-_{n,1}$ para cada n e que o 1.º membro de 31'*) se reduz ao complemento $(\underset{n}{\times} A^-_{n,1})^-$.

3. Peculiaridades da multiplicação

Em seguida vamos chamar a atenção para três aspectos da multiplicação cartesiana que, em certas circunstâncias, podem revestir-se dum interesse muito específico.

a) É óbvio que o segundo membro de cada uma das versões de 29) beneficia da propriedade associativa, relativa à multiplicação numérica. Por outro lado, se efectuarmos associações de coordenadas ω_n (eventualmente em número infinito) do ponto genérico ω do espaço-produto Ω, corresponder-lhes-ão associações de factores A_n do conjunto-produto genérico A. Por isso, desde que *admitamos que o ponto genérico ω é insensível a quaisquer associações das suas coordenadas,* então a fórmula 29) institui a multiplicação cartesiana em operação associativa (em sentido lato). Embora a hipótese posta não possa ser aceite irrestritamente, ela revela-se propícia para efeitos de continuação do nosso estudo. Nesta conformidade, *passamos a admitir sistematicamente a associatividade da multiplicação cartesiana.*

Exemplo 13. Vale a relação

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4) = A_1 \times (A_2 \times A_3 \times A_4) =$$

$$= (A_1 \times A_2 \times A_3) \times A_4.$$

b) Seja $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_p, \ldots)$ o ponto que resulta do ponto genérico $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ quando as coordenadas deste são sujeitas a uma permutação fixa. Corresponde um novo espaço--produto $\tilde{\Omega} = \underset{p}{\times} \tilde{\Omega}_p$, no qual podemos considerar conjuntos-produtos $\underset{p}{\times} \tilde{A}_p$, que resultarão de conjuntos-produtos $\underset{n}{\times} A_n$ por meio duma permutação de factores decalcada da permutação anterior, relativa a coordenadas. Valerá uma fórmula análoga a 29), a saber

$$I_{\underset{p}{\times} \tilde{A}_p} (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_p, \ldots) \equiv \prod_p I_{\tilde{A}_p} (\tilde{\omega}_p), \tag{32}$$

cujo segundo membro é identificável com o segundo membro da segunda versão de 29), isto graças à propriedade comutativa relativa à multiplicação numérica. Por outro lado, desde que admitamos que o ponto genérico ω é insensível a quaisquer permutações das suas coordenadas, então os primeiros membros de 29) e de 32) também se tornam identificáveis e assim resulta a igualdade $\underset{p}{\times} \tilde{A}_p = \underset{n}{\times} A_n$, válida para conjuntos A_n arbitrários. Mas agora a hipótese posta é de difícil aceitação e até se revela nociva para efeitos de continuação do nosso estudo. Nesta conformidade, *passamos a recusar, em geral, a comutatividade da multiplicação cartesiana.*

Exemplo 14. Consideremos dois espaços-factores $\Omega_n (n = 1,2)$, cada um deles formado pelos dois primeiros números naturais, e tomemos aí os conjuntos-factores respectivamente $A_1 = \{1\}$ e $A_2 = \{2\}$. Então, a fórmula 28") conduz a $A_1 \times A_2 = \{(1,2)\}$, o conjunto elementar formado pelo único ponto (1, 2). Semelhantemente se obtém $A_2 \times A_1 = \{(2,1)\}$. Se admitíssemos a comutatividade da multiplicação cartesiana neste caso específico, ver-nos-íamos obrigados a identificar os pares (1,2) e (2,1) ou seja a tomar uma atitude em geral pouco aconselhável.

c) Sejam n e p índices com valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$ e $1 \leqslant p < P \leqslant +\infty$, com N e P fixos, e admitamos que, seja qual for n, o espaço Ω_n de ponto genérico ω_n contém conjuntos $A_{n,p}$, a escolher arbitrariamente. Nesta conformidade, ocorre uma propriedade importante para efeitos ulteriores, a chamada *permutabilidade entre as operações de intersecção e de multiplicação*, expressa através da fórmula

$$\underset{p}{\Lambda}\,(\underset{n}{\times} A_{n,p}) = \underset{n}{\times}\,(\underset{p}{\Lambda} A_{n,p}). \tag{33}$$

Justificação de 33). Pelo teorema 3 basta provar a igualdade entre as indicatrizes dos dois membros de 33). Atendendo às fórmulas 6') e 29) e às propriedades comutativa e associativa da multiplicação numérica, o cálculo decorre como segue:

$$I_{\underset{p}{\Lambda}(\underset{n}{\times} A_{n,p})}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \equiv \prod_p [\prod_n I_{A_{n,p}}(\omega_n)] \equiv$$

$$\equiv \prod_n [\prod_p I_{A_{n,p}}(\omega_n)] \equiv I_{\underset{n}{\times}(\underset{p}{\Lambda} A_{n,p})}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots).$$

Exemplo 15. Em 31'*) admitiram-se, para qualquer n, as relações $A_{n,2} \leqslant A_n$ e $A_{n,1} = A_n - A_{n,2}$ (decorrentes da propriedade monotónica da adição de conjuntos e da fórmula 18)). Se substituirmos cada $A_{n,2}$ por um B_n *arbitrário*, não necessariamente contido em A_n, a fórmula 13") dá, seja qual for n, a relação $A_n = (A_n \Lambda B_n) \dot{+}$ $\dot{+} (A_n - B_n)$, cuja última parcela vamos designar por $A'_{n,1}$ e cuja primeira parcela vamos designar por $A'_{n,2}$. Corresponde uma generalização de 31'*) em que cada conjunto A_{n,p_n} é substituído pelo seu homólogo A'_{n,p_n}. Por outro lado, as fórmulas 33) e 11) dão

$$(\underset{n}{\times} A_n)-(\underset{n}{\times} A'_{n,2})=[\underset{n}{\times} A_n]-[(\underset{n}{\times} A_n)\Delta(\underset{n}{\times} B_n)]=(\underset{n}{\times} A_n)-(\underset{n}{\times} B_n).$$

Logo a fórmula 31'*) pode assumir o seguinte aspecto mais geral:

$$(\underset{n}{\times} A_n) - (\underset{n}{\times} B_n) = \dot{\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots}}^{*} (A'_{1,p_1} \times A'_{2,p_2} \times \ldots \times A'_{n,p_n} \times \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant \underset{n}{V} [A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \times (A_n - B_n) \times A_{n+1} \times \ldots] \tag{34}$$

onde, seja qual for n, se tem

$$A'_{n,1} = A_n - B_n \quad \text{e} \quad A'_{n,2} = A_n \Delta B_n.$$

Exercício 19. Dados os espaços-factores Ω_1 e Ω_2 e escolhidos arbitrariamente conjuntos $A_1, B_1 \leqslant \Omega_1$ e $A_2, B_2 \leqslant \Omega_2$, deduza as relações:

a) $(A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2) = [(A_1 \times A_2) - (A_1 \times B_2)] -$
$- [(B_1 \times A_2) - (B_1 \times B_2)]$;

b) $(A_1 \Delta B_1) \times (A_2 \Delta B_2) = [(A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2)] \dot{+}$
$\dot{+} [(A_1 - B_1) \times (B_2 - A_2)] \dot{+} [(B_1 - A_1) \times (A_2 - B_2)] \dot{+}$
$\dot{+} [(B_1 - A_1) \times (B_2 - A_2)]$.

Exercício 20. Dados os espaços-factores Ω_n, formando uma sequência ou uma sucessão, e escolhidos arbitrariamente, seja qual for n, conjuntos $A_n, B_n \leqslant \Omega_n$, prove que se verifica a seguinte igualdade entre conjuntos:

$$\underset{n}{\times} (A_n - B_n) = (\underset{n}{\times} A_n) - (\underset{n}{\times} B_n^-)^-.$$

4. Espaços reais (comuns e alargados)

Neste n.º do § 7 vamos introduzir, recorrendo ao conceito de multiplicação cartesiana, um tipo de espaço que ocupa um lugar de realce em questões de medida.

Comecemos pelo caso em que o espaço dado $\Omega(\omega)$ é formado por todos os números reais e finitos, caso este em que preferimos a letra x à letra ω e a letra X à letra Ω. É uso chamar ao espaço X(x) *recta real* ou *espaço real unidimensional ou a uma dimensão*; sabe-se que este espaço admite uma figuração geométrica comparativamente simples através dum *eixo real* ou *recta de Descartes* † ou seja duma recta real munida de origem, de orientação (ou sentido de percurso) e de escala (ou unidade de comprimento). Haverá uma figuração do género referido para cada eixo que se queira escolher e, escolhida uma dessas figurações, haverá correspondência biunívoca e recíproca entre os números x possíveis e os pontos do eixo com abcissa x, correspondência essa que explica que se vá recorrer, muitas vezes, a uma *terminologia geométrica* para caracterizar certos conjuntos $A \leqslant X$.

É bem conhecida a classificação dos conjuntos $A \leqslant X$ em *finitos*, (infinitos) *numeráveis* e (infinitos) *transnumeráveis*.

Posto isso, escolhidos arbitrariamente dois números reais a e $b \geqslant a$, qualquer um deles ou finito ou igual a $-\infty$ ou igual a $+\infty$, chama-se *intervalo linear* ou *intervalo unidimensional ou a uma dimensão* (abreviadamente *intervalo* quando não houver risco de confusão com outras dimensionalidades a introduzir mais adiante) a todo o conjunto contido em X que tenha uma das quatro formas seguintes:

$$\{a \leqslant x \leqslant b\},\ \{a \leqslant x < b\},\ \{a < x \leqslant b\}\ \text{e}\ \{a < x < b\},$$

onde, é claro, o sinal = não pode figurar junto a um a ou b que seja infinito. Aos pontos a e b chamamos, em cada um dos quatro casos, (pontos) *extremos* do intervalo considerado, sendo a o

† Também denominado *espaço de Descartes unidimensional ou a uma dimensão.*

extremo esquerdo ou inferior e sendo b o *extremo direito ou superior*. Chama-se *ponto interior* a todo o ponto que pertença a um intervalo e não seja nenhum dos seus extremos.

Podemos distinguir entre os quatro casos supracitados classificando o intervalo de *fechado* no 1.º caso, de *misto* (ou semifechado ou semiaberto) nos casos 2.º e 3.º (*fechado do lado do sinal* $=$ *e aberto do lado do sinal* $<$) e de *aberto* no 4.º caso. Por outro lado, o intervalo de extremos a e b diz-se *degenerado* ou *nulo* se $a = b$ e diz-se *não-degenerado* ou *significativo* nos demais casos. Um intervalo nulo será um conjunto elementar se for um intervalo fechado e será o conjunto vazio O nos demais casos. Um intervalo diz-se *limitado* se for nulo ou significativo com ambos os extremos finitos e diz-se *ilimitado* nos demais casos, nos quais pode distinguir-se entre intervalos limitados do lado esquerdo ou inferior [ou direito ou superior] e ilimitados do lado direito ou superior [ou esquerdo ou inferior], correspondentes a um a[ou b] finito, e o intervalo ilimitado dos dois lados, este coincidente com X. Claro que o intervalo X é aberto e que um intervalo ilimitado não pode ser fechado.

Acrescentamos que, por vezes, *há conveniência em introduzir os números* $-\infty$ *e* $+\infty$ *como valores de* x admissíveis, caindo-se então no espaço $\overline{X} = X \dot{+} \{-\infty, +\infty\} = X \dot{+} \infty$, onde ∞ representa o conjunto $\{-\infty, +\infty\}$. Claro que as definições e a nomenclatura atrás introduzidas podem transitar para esta situação, que agora o sinal $=$ pode figurar junto a um extremo infinito e que passa a ser possível um intervalo ilimitado e fechado. Se quisermos, podemos classificar $\overline{X}$ como *recta real alargada*.

Posto isso, vamos supor que o índice n toma valores inteiros e consecutivos tais que $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$, com N fixo, e que a cada n corresponde uma recta real $X_n(x_n)$, abreviadamente X_n. Nesta conformidade, $\underset{n}{\times} X_n = X$ será o espaço-produto cujo ponto genérico $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ terá x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ por n-ésima coordenada.

Ao espaço-produto X(x) ou X chamamos *espaço real a* (N−1) *dimensões*. Caso se tenha $N = 2$, vamos recair na recta real e, caso se tenha $N = 3$, vamos cair no *espaço real a duas dimensões*, também denominado *plano real.* Por outro lado, se N = 4, vamos cair no *espaço real a três dimensões,* também denominado *espaço real corrente,* e, se N > 4, vamos cair num *espaço real a* (N−1)>3 *dimensões,* também denominado *hiperespaço real a* (N−1) *dimensões.*

O plano real [ou espaço real corrente] admite uma figuração geométrica comparativamente acessível através de qualquer *plano* ou espaço a 2 dimensões [ou *espaço corrente* ou espaço a 3 dimensões] *de Descartes,* quer dizer munido dum sistema de dois [ou três] eixos figurativos das duas [ou três] rectas-factores — que se escolhem preferentemente com origem comum, com escala comum, mutuamente ortogonais e definidores da noção de distância ou métrica euclideana. Escolhida uma tal representação, haverá correspondência biunívoca e recíproca entre os agrupamentos (x_1, x_2) [ou(x_1, x_2, x_3)] possíveis e os pontos do respectivo espaço de Descartes com abcissa x_1 e ordenada x_2 [ou também cota x_3], correspondência essa que explica que se vá recorrer, muitas vezes, a uma *terminologia geométrica* para caracterizar certos conjuntos $A \leqslant X_1 \times X_2$ [ou $X_1 \times X_2 \times X_3$]. Note-se, porém, que os chamados hiperespaços reais não oferecem comodidades de figuração geométrica no estilo das que acabamos de referir.

Entre os conjuntos especiais contidos num espaço real a (N − 1) dimensões destacam-se os chamados *intervalos a* (N−1) *dimensões* — denominados também *intervalos planos* se N−1=2, *intervalos correntes* se N−1=3 e *hiperintervalos* se N−1>3 — que se definem como sendo os produtos de (N−1) intervalos lineares J_n tais que $J_n \leqslant X_n$ para cada n. Há quem chame a esses intervalos-produtos *rectângulos a* (N−1) *dimensões,* intervalos lineares se N−1=1, rectângulos vulgares ou simplesmente rectângulos se N−1=2, hiperrectângulos se N−1>2 e, por vezes, paralelipípedos se N−1=3. Caso recorramos à representação geométrica supracitada, um rectângulo (vulgar) será um rectângulo de lados paralelos aos eixos e um rectângulo a 3 dimensões será um paralelipípedo de arestas paralelas aos eixos.

Posto isso, um intervalo a (N−1) dimensões diz-se *limitado* se ele for vazio ou desembaraçado de factores lineares ilimitados e diz-se *ilimitado* nos demais casos. Um tal intervalo, suposto não-vazio, diz-se *aberto* se e só se forem abertos todos os seus factores, diz-se *fechado* se e só se forem fechados todos os seus factores e diz-se *misto* nos demais casos. O intervalo diz-se *degenerado* se tiver algum factor degenerado e diz-se *não-degenerado* nos demais casos. Acrescentemos que um intervalo do tipo $X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times \{x_n\} \times X_{n+1} \times \ldots$, com as adaptações notacionais apropriadas no caso (inevitável) de $\{x_n\}$ vir a ser o primeiro factor e no caso (eventual) de $\{x_n\}$ vir a ser o último factor, um intervalo desses é denominado *plano paralelo ao plano coordenado* número n (o próprio plano coordenado se $x_n = 0$), denominação essa inspirada na figuração geométrica correspondente ao caso $N-1=3$. Em pormenor: se $N=2$, obtemos um conjunto elementar $\{x_1\}$ ou $\{x\}$; se $N=3$, a figuração faz-se por meio duma recta perpendicular ao eixo coordenado número n; se $N=4$, a figuração faz-se por meio dum plano geométrico paralelo ao plano coordenado número n (perpendicular ao eixo coordenado número n); se $N>4$, não há representação no estilo das anteriores e o nosso plano será um *hiperplano a* $(N-2)$ *dimensões.*

Acrescentemos que, por vezes, há conveniência em substituir cada recta-factor X_n do texto precedente pela correspondente recta real alargada $\overline{X}_n$, caindo-se então no espaço-produto $\overline{X} = \underset{n}{\times} \overline{X}_n = X \dot{+} \infty$, onde ∞ representa o conjunto dos pontos com alguma (uma ou mais) coordenada infinita com sinal qualificado (ou $-\infty$ ou $+\infty$). Claro que as definições e a nomenclatura introduzidas a propósito dos espaços reais a $(N-1)$ dimensões podem transitar para o novo espaço-produto $\overline{X}$, a que vamos chamar *espaço real alargado a* $(N-1)$ *dimensões.* Neste contexto, escolhido o valor de n, permitimo-nos chamar a atenção para os novos planos paralelos ao plano coordenado número n que são da forma $\overline{X}_1 \times \ldots \times \overline{X}_{n-1} \times \{\pm \infty\} \times \overline{X}_{n+1} \times \ldots$, um para o sinal $-$ e outro para o sinal $+$.

Observação. Caso se tenha $N \leqslant 4$, podemos arranjar uma representação geométrica do espaço real alargado $\overline{X}$ a $(N-1)$ dimensões, considerando o espaço X com o mesmo número de dimensões e procedendo como segue. Sendo x_n $(1 \leqslant n \leqslant N-1)$ a coordenada número n do ponto genérico $x \varepsilon X$: considere-se um espaço de Descartes a $(N-1)$ dimensões que seja representativo de X; tome-se aí o rectângulo fechado R a $(N-1)$ dimensões caracterizado pela relação $|x_n| \leqslant 2$ para cada n admissível; designe-se por R_∞ o «contorno» de R, este caracterizado pela relação suplementar $|x_n| = 2$ para algum n; feito isso, ponha-se $R-R_\infty =$ $= \sum_{0 \leqslant m < +\infty} R_m$, onde R_0 representa o rectângulo aberto caracterizado pela relação $|x_n| < 1$ para todo o n e onde, seja qual for $m > 0$, o símbolo R_m representa a região caracterizada pelas relações simultâneas

$$|x_n| < \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{1}{2^k}$$

para todo o n e

$$|x_n| \geqslant \sum_{0 \leqslant k < m} \frac{1}{2^k}$$

para algum n; em seguida, seja qual for a parte R_l ($l \leqslant +\infty$) de R, substitua-se o comprimento original de todo o segmento de recta contido em R_l por um novo comprimento 2^l vezes maior (sem esquecer a convenção $(\pm\infty)\cdot 0 = 0$); atribua-se a todo o segmento de recta contido em R um novo comprimento igual ao valor do somatório dos novos comprimentos das suas partes contidas em R_0, em R_1, em R_2, etc.; por fim, estabeleça-se a correspondência biunívoca e recíproca entre os pontos $x \varepsilon \overline{X}$, de coordenadas x_n, e os pontos de R, com as suas coordenadas reescalonadas pelo processo aqui descrito. Claro que o *afastamento entre* dois pontos de R, quer dizer o novo comprimento do correspondente segmento de recta, deixa de ser invariante com respeito a traslações paralelas e, se $N > 2$, com respeito a rotações em torno dum ponto fixo e ainda, se $N = 4$, com respeito a rotações em torno dum eixo fixo. Em contrapartida, passa a haver uma representação geométrica cómoda para os pontos $x \varepsilon \overline{X}$ com alguma coordenada infinita, devendo acrescentar-se que o conjunto ∞ passa a ser representado pela região R_∞.

Exemplo 16. Vale a seguinte asserção: «Dado um espaço real a (N−1) dimensões [eventualmente alargado] e escolhidos arbitrariamente dois intervalos a (N−1) dimensões, ambos contidos no espaço dado, eles darão uma intersecção que será, por sua vez, um intervalo a (N−1) dimensões.» — Com efeito, a tese é verdadeira para $N=2$, conforme se reconhece por meio do exame de todas as formas de intervalos capazes de intervir. Caso se tenha $N > 2$, podemos representar por A_n e B_n os intervalos lineares que são os factores números n respectivamente do 1.º e do 2.º intervalo a $(N-1)$ dimensões que se tenham escolhido. Então, a fórmula 33) dá

$$(\underset{n}{\times} A_n) \wedge (\underset{n}{\times} B_n) = \underset{n}{\times} (A_n \wedge B_n)$$

e a tese segue.

Exercício 21. Dê a interpretação geométrica do teorema 7 quando N for igual a 3 ou 4 e quando os conjuntos A_n e $A_{n,p}$ forem intervalos lineares, tomados em eixos reais.

5. **Suplementos**

Os produtos cartesianos até agora referidos não esgotam as questões que o seu estudo suscita e das quais vamos apresentar duas neste n.º final do § 7.

a) *Nem todo o conjunto contido num espaço-produto dado tem a propriedade de ser um conjunto-produto.* Para exemplificar a afirmação feita, podemos trabalhar no espaço real corrente $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, de ponto genérico $x = (x_1, x_2, x_3)$, e tomar aí o conjunto $A = \{(1,1,2), (1,2,2), (2,1,2)\}$, com 3 pontos, o qual só poderia ser um produto da forma $A_1 \times A_2 \times A_3$ se tivéssemos $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2\}$ e $A_3 = \{2\}$, caso este em que a fórmula 28*) conduziria à igualdade absurda $3 = 2 \cdot 2 \cdot 1$. Todavia, se pusermos $X = (X_1 \times X_2) \times X_3$, então A passará a ser o produto de $\{(1,1), (1,2), (2,1)\} \leqslant X_1 \times X_2$ por $\{2\} \leqslant X_3$, circunstância essa que sublinha bem o carácter artificial (aliás benéfico para os nossos propósitos) da hipótese de associatividade para a multiplicação cartesiana.

b) Podem definir-se *produtos cartesianos mais gerais do que os estudados até aqui.* Com efeito, seja T uma família (eventualmente transnumerável) de índices t, suponha-se que a cada $t \varepsilon T$ corresponde um espaço Ω_t de ponto genérico ω_t e represente-se por $\omega = (\omega_t, t \varepsilon T)$ o agrupamento genérico que se obtém, escolhendo arbitrariamente um ω_t para cada t admissível e *adoptando em relação aos* ω_t *o mesmo dispositivo para a entrada das diversas determinações de* t *que se queira adoptar em relação à família* T. Podemos interpretar o agrupamento genérico ω como ponto genérico dum novo espaço Ω e, escolhido ω, podemos interpretar os pontos agrupados ω_t como *coordenadas* de ω. Em seguida, escolhido arbitrariamente um conjunto $A_t \leqslant \Omega_t$ para cada $t \varepsilon T$, podemos fazer corresponder o conjunto $A \leqslant \Omega$ formado pelos pontos $(\omega_t, t \varepsilon T)$ tais que se tenha $\omega_t \varepsilon A_t$ para cada $t \varepsilon T$, conjunto A esse obviamente não-vazio se não houver nenhum A_t vazio e naturalmente igual ao vazio $O \leqslant \Omega$ se para algum t o correspondente A_t for o vazio $O_t \leqslant \Omega_t$. O conjunto A assim definido será o *produto* (*cartesiano*) *de factores* A_t, obtido pela *multiplicação* (*cartesiana*) desses factores e representado pela igualdade simbólica

$$A = \underset{t \varepsilon T}{\times} A_t = \underset{t}{\times} A_t = \times A_t, \tag{35}$$

que generaliza 28) e que compreende os casos particulares

$$\Omega = \underset{t \varepsilon T}{\times} \Omega_t \tag{35'}$$

e

$$\{(\omega_t, t \varepsilon T)\} = \underset{t \varepsilon T}{\times} \{\omega_t\}, \tag{35''}$$

correspondentes respectivamente a 28') e a 28").

Passando para indicatrizes, podemos substituir $I_A(\omega) = I_A((\omega_t, t \varepsilon T))$ por $I_A(\omega_t, t \varepsilon T)$ e estabelecer, em seguida, uma generalização da fórmula 29), a saber

$$I_{\underset{t \varepsilon T}{\times} A_t}(\omega_t, t \varepsilon T) \equiv \inf_{t \varepsilon T} I_{A_t}(\omega_t)$$

ou

$$I_{\underset{t\epsilon T}{\times} A_t} = \inf_{t\epsilon T} I_{A_t}. \tag{36}$$

Justificação de 36). Qualquer 1.º membro vale 1 se e só se $\omega_t \varepsilon A_t$ para cada $t\varepsilon T$, por sua vez se e só se o correspondente 2.º membro valer 1.

Posto isso, *a tese do teorema* 6 *generaliza-se como segue*:

«$O \neq \underset{t\epsilon T}{\times} B_t \leqslant \underset{t\epsilon T}{\times} A_t$ se e só se $B_t \leqslant A_t$ para cada $t\varepsilon T$.»

Esta propriedade deduz-se substituindo na demonstração do teorema 6 o índice n pelo índice t, depois Π por inf, em seguida $(\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n, \dots)$ por $(\omega'_t, t\varepsilon T)$ e, por fim, $I_{B_n}(\omega'_n) = 1$ para cada n por $I_{B_t}(\omega'_t) = 1$ para cada t.

O corolário 6' generaliza-se como segue:

«$O \neq \underset{t\epsilon T}{\times} B_t = \underset{t\epsilon T}{\times} A_t$ se e só se $B_t = A_t$ para cada $t\varepsilon T$.»

A justificação é uma adaptação simples da do corolário 6'.

Por outro lado, dadas a anterior família de índices T(t) e outra família de índices U(u), considerem-se, seja qual for $t\varepsilon T$, conjuntos $A_{t,u} \leqslant \Omega_t$, um para cada $u\varepsilon U$; obter-se-á uma generalização de 33) sob a forma

$$\underset{u}{\Lambda}(\underset{t}{\times} A_{t,u}) = \underset{t}{\times}(\underset{u}{\Lambda} A_{t,u}), \tag{37}$$

a qual se deduz substituindo na justificação de 33) n por t, p por u, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ por $(\omega_t, t\varepsilon T)$, $\underset{p}{\Pi}$ por $\underset{u}{\inf}$ e $\underset{n}{\Pi}$ por $\underset{t}{\inf}$.

Tomando em conta que o segundo membro da primeira versão de 36) é insensível a associações arbitrárias efectuadas sobre as coordenadas ω_t, *admitimos* a mesma insensibilidade para o argumento do correspondente primeiro membro e obtemos assim uma *associatividade em sentido lato* para a multiplicação cartesiana, do mesmo estilo da associatividade em sentido lato para a intersecção e para a união. Por outro lado, podemos generalizar adequadamente a fórmula 32) e chegar à conclusão que é inoportuno admitir a comutatividade da multiplicação cartesiana.

Por fim, o estudo do n.º **4** também se pode generalizar, vindo a cair-se em espaços reais, intervalos (rectângulos) e planos paralelos a planos coordenados, todos mais gerais do que os seus homólogos anteriores e todos susceptíveis de serem alargados.

§ 8 — PROJECÇÕES, CILINDROS, MARGINAÇÕES E UNIÕES EXTERNAS

1. Projecções

Vamos tomar para ponto de partida uma família de índices T(t), *arbitrária contanto que haja pelo menos duas determinações de* t, para a qual escolhemos um *dispositivo de entrada das diversas determinações de* t. Corresponde, por 35'), um espaço-produto não-degenerado $\Omega = \underset{t\varepsilon T}{\times} \Omega_t$, com ponto genérico $\omega = (\omega_t, t\varepsilon T)$. Muitas vezes, mas não obrigatoriamente, ter-se-á $T = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, com $1 \leqslant n < N \leqslant +\infty$ e com $N > 2$ fixo.

Caso cindamos a família T(t) em duas subfamílias disjuntas entre si, digamos $T^*(t^*)$ e $T^{**}(t^{**})$, a primeira caracterizada pela relação ou $t = t^*$ ou $t \neq t^{**}$ e a outra caracterizada pela relação ou $t = t^{**}$ ou $t \neq t^*$, então correspondem os *espaços-produtos parciais*

$$\Omega^* = \underset{t^*\varepsilon T^*}{\times} \Omega_{t^*} = \underset{t=t^*}{\times} \Omega_t = \underset{t\neq t^{**}}{\times} \Omega_t, \tag{38}$$

com ponto genérico $\omega^* = (\omega_{t^*}, t^*\varepsilon T^*)$,

e

$$\Omega^{**} = \underset{t^{**}\varepsilon T^{**}}{\times} \Omega_{t^{**}} = \underset{t=t^{**}}{\times} \Omega_t = \underset{t\neq t^*}{\times} \Omega_t,$$

com ponto genérico $\omega^{**} = (\omega_{t^{**}}, t^{**}\varepsilon T^{**})$, que são suplementares um do outro com respeito a Ω e a que vamos chamar *espaços marginais de* Ω, *cada um em relação ao outro.*

Escolhido arbitrariamente um conjunto não-vazio $A \leqslant \Omega$, podemos fazer corresponder ao seu ponto genérico ω o novo ponto ω^* que se obtém, suprimindo em $\omega = (\omega_t, t\varepsilon T)$ as coordenadas ω_t tais que $t \neq t^*$; forma-se assim um novo conjunto $A^* \leqslant \Omega^*$, bem determinado e não-vazio. Por outro lado, caso partamos do conjunto A coincidente com o vazio $O \leqslant \Omega$, fazemos corresponder o conjunto A^* coincidente com o vazio $O^* \leqslant \Omega^*$. Em qualquer das hipóteses apresentadas, chamamos *projecção de* A *sobre* Ω^* *e/ou segundo a direcção de* Ω^{**} à operação que transforma A em A^*, chamamos a A *conjunto projectado* e chamamos a A^* *conjunto-projecção* ou, abreviadamente, *projecção* (devendo porém evitar-se a confusão terminológica deste conjunto com a operação que lhe deu origem). Note-se que o espaço marginal Ω^*[ou Ω^{**}] não é senão a projecção de Ω segundo a direcção de Ω^{**} [ou Ω^*].

Exemplo 17. Em seguida vamos apresentar casos particulares do que acabamos de expor, casos esses que vão esclarecer a motivação da terminologia aqui introduzida. — Assim, caso Ω seja o plano real $X = X_1 \times X_2$, com ponto genérico $x = (x_1, x_2)$, a família T é formada pelos índices 1 e 2 que vamos distribuir, colocando (por exemplo) 1 em T^* e 2 em T^{**}. Teremos $X^* = X_1$, $X^{**} = X_2$ e a projecção de qualquer $A \leqslant X$ sobre X_1 e/ou a direcção de X_2 será o conjunto A^* ou $A_1 \leqslant X_1$ cuja representação geométrica num plano de Descartes (onde se tenha figurado A) coincide com a figura que não é senão «a projecção de A sobre X_1 e/ou a direcção de X_2» que todos conhecemos do estudo da Geometria elementar. — Por outro lado, caso Ω seja o espaço real corrente $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, com ponto genérico $x = (x_1, x_2, x_3)$, a família T é formada pelos índices 1, 2 e 3 que vamos distribuir, colocando (por exemplo) 1 e 2 [ou apenas 1] em T^* e 3 [ou 2 e 3] em T^{**}. Teremos $X^* = X_1 \times X_2 = X_{1,2} = X_{(3)}$ [ou $= X_1$], $X^{**} = X_3$ [ou $= X_2 \times X_3 = X_{2,3} = X_{(1)}$] e a projecção de qualquer $A \leqslant X$ sobre $X_{(3)}$ [ou X_1] e/ou a direcção de X_3 [ou $X_{(1)}$] será o conjunto $A^* = A_{1,2} = A_{(3)} \leqslant X_{(3)}$ [ou $= A_1 \leqslant X_1$] cuja representação geométrica num espaço corrente de Descartes (onde se tenha figurado

A) coincide com a figura que não é senão «a projecção de A sobre $X_{(3)}$ [ou X_1] e/ou a direcção de X_3 [ou $X_{(1)}$]» que todos conhecemos do estudo da Geometria elementar.

Posto isso, vamos ver como os conjuntos envolvidos numa operação de projecção se fazem acompanhar pelas suas indicatrizes. Vale a fórmula

$$I_{A^*}(\omega_{t^*}, t^* \varepsilon T^*) \equiv \sup_{(\omega_{t^{**}}, t^{**} \varepsilon T^{**}) \varepsilon \underset{t^{**} \varepsilon T^{**}}{\times} \Omega_{t^{**}}} I_A(\omega_t, t \varepsilon T) \qquad (39)$$

ou, mais simplesmente,

$$I_{A^*}(\omega^*) \equiv \sup_{\omega^{**} \varepsilon \Omega^{**}} I_A(\omega)$$

ou, ainda mais simplesmente,

$$I_{A^*} = \sup_{\Omega^{**}} I_A .$$

Justificação de 39). Optando pela primeira versão de 39), o aparecimento do valor 1 para o primeiro membro é equivalente à existência dum ponto (ω_t, $t \varepsilon T$) que respeite o argumento do primeiro membro e que pertença a A, por sua vez equivalente ao aparecimento do valor 1 para o segundo membro.

Seguem algumas *propriedades da* (operação de) *projecção.*

Para começar, desde que T^{**} abranja mais do que um índice t^{**}, o segundo membro da primeira versão de 39) não é alterado se substituirmos a formação do supremo, abreviadamente a *supremação*, global com respeito ao ponto ($\omega_{t^{**}}$, $t^{**} \varepsilon T^{**}$) por supremações parciais em cadeia tais que cada uma delas envolva certas coordenadas $\omega_{t^{**}}$ (uma ou mais), a percorrerem em simultâneo os seus espaços $\Omega_{t^{**}}$, e que a última acabe por apanhar as coordenadas $\omega_{t^{**}}$ remanescentes; essas supremações parciais podem associar-se ou trocar de ordem sem afectar o resultado final, isto na qualidade de operações de supremação já que as indicatrizes supremadas se vão modificando. Por outro lado, cada uma das supremações parciais aqui referidas conduz a uma projecção parcial: a primeira de A, a segunda da primeira projecção parcial de A, a terceira do resultado da segunda, etc., e a última com resultado igual a A*. Por isso, a *projecção* (*global*) tratada em 39) *pode resolver-se em projecções parciais, que serão associativas e comutativas,* isto na qualidade de operações já que os conjuntos projectados se vão modificando.

Exercício 22. Dê a interpretação das propriedades comutativa e associativa, relativas a projecções parciais, quando o espaço-produto dado Ω for o espaço real corrente, figurado como espaço de Descartes.

Posto isso, das duas uma: ou vamos juntar ao conjunto $A \leqslant \Omega$ outro conjunto $B \leqslant \Omega$ ou vamos substituir A por $A_u \leqslant \Omega$, com o índice u a percorrer uma família U. Nesta conformidade, apresentamos a relação

(40)

a) se A^* e B^* forem disjuntos, o mesmo sucede a A e B;

b) se $A \leqslant B$, então $A^* \leqslant B^*$;

c) $(\underset{u \in U}{V} A_u)^* = \underset{u \in U}{V} A^*_u$ (*propriedade distributiva da projecção com respeito à união*).

Justificação de 40).

a) Atendendo ao teorema 5, basta ter em conta que primeiro a hipótese de disjunção implica $I_{A^*} I_{B^*} = 0$ e que, em seguida, a fórmula 39) implica $I_A I_B = 0$.

b) Atendendo ao teorema 4, basta ter em conta que primeiro a hipótese posta implica $I_A \leqslant I_B$ e que em seguida, fixado arbitrariamente ω^*, a fórmula 39) implica $I_A \leqslant I_{B^*}$ em todos os pontos ω^{**}; logo $I_{A^*} \leqslant I_{B^*}$ e a tese segue.

c) Atendendo às fórmulas 39) e 7), a tese é equivalente à relação

$$\sup_{\omega^{**} \in \Omega^{**}} (\sup_{u \in U} I_{A_u}) = \sup_{u \in U} (\sup_{\omega^{**} \in \Omega^{**}} I_{A_u}),$$

esta de verificação imediata.

Exemplo 18. Consideremos o caso particular em que $O \neq A = \underset{t \epsilon T}{\times} A_t$, com $A_t \leqslant \Omega_t$ para cada $t \epsilon T$. Neste caso, as fórmulas 39) e 36) e um cálculo adicional (e fácil) dão, seja qual for ω^*,

$$0 \neq I_{A^*}(\omega^*) = \sup_{\omega^{**} \epsilon \Omega^{**}} [\inf_{t \epsilon T} I_{A_t}(\omega_t)] = \inf_{t^* \epsilon T^*} I_{A_{t^*}}(\omega_{t^*}) = I_{\underset{t^* \epsilon T^*}{\times} A_{t^*}}(\omega^*),$$

donde a relação $A^* = \underset{t^* \epsilon T^*}{\times} A_{t^*} \neq O^*$.

Exemplo 19. Retomemos o plano real $X_1 \times X_2$ do exemplo 17 e tomemos aí os conjuntos elementares $A = \{(1,1)\}$ e $B = \{(1,2)\}$, com projecções sobre $X^* = X_1$ que são $A^* = \{1\}$ e $B^* = \{1\}$. Resulta $A^* = B^*$, apesar de se ter $A \neq B$ e até A disjunto de B; resulta $A^* \leqslant B^*$, apesar de ser falsa a relação $A \leqslant B$; resulta $A^* - B^* = O^* \neq A^* = (A-B)^*$; resulta $A^* \wedge B^* = A^* \neq O^* = (A \wedge B)^*$; resulta $(A^*)^- = \{1\}^- \neq X^* = (A^-)^*$. Acabamos de exibir uma certa penúria de propriedades úteis da (operação de) projecção que talvez se possa atenuar, restringindo essa operação a conjuntos seleccionados dum modo especial, com salvaguarda dum bom grau de aproveitabilidade. É o que vamos procurar fazer no n.º seguinte.

Exercício 23. Prove que, seja qual for A (conjunto contido no espaço-produto Ω), se tem a relação $(A^*)^- \leqslant (A^-)^*$ (este conjunto contido no espaço marginal Ω^*).

2. Cilindros e bases

Admitidas as convenções do n.º 1, um conjunto $A \leqslant \Omega$ classifica-se como *cilindro com base (contida) em* Ω^* *e/ou com geratrizes paralelas a* Ω^{**} se e só se pertencerem ou simultaneamente a A ou simultaneamente a A^- quaisquer dois pontos ω que tenham em comum todas as coordenadas ω_{t^*} e que difiram por alguma (uma ou mais) coordenada $\omega_{t^{**}}$. Aqui, supondo fixados Ω^* e Ω^{**}, usaremos frequentemente o termo *cilindro*, sem especificação, isto sempre que não houver receio de ambiguidade.

A caracterização dos cilindros pelas suas indicatrizes faz-se através do

Teorema *8.* «Um conjunto contido num espaço-produto não-degenerado, de ponto genérico $\omega = (\omega_t, t\varepsilon T)$, é um cilindro se e só se a sua indicatriz for uma função independente da escolha do ponto $\omega^{**} = (\omega_{t^{**}}, t^{**}\varepsilon T^{**})$ ou, equivalentemente, se e só se a sua indicatriz for uma função exclusiva de $\omega^{*} = (\omega_{t^{*}}, t^{*}\varepsilon T^{*})$.»

Demonstração. Se $A \leqslant \Omega$ for um cilindro e se $I_A(\omega)$ for a correspondente indicatriz, quaisquer dois pontos ω — digamos ω' e ω'' — com o mesmo ω^* e com determinações diferentes para ω^{**} — digamos $\omega^{**\prime}$ e $\omega^{**\prime\prime}$ — conferem ambos à função I_A ou o valor 1 (se $\omega'\varepsilon A$) ou o valor 0 (se $\omega'\varepsilon A^-$), donde se conclui que I_A é independente de ω^{**}. Inversamente, verificada esta condição de independência e fixado arbitrariamente ω^*, então $I_A(\omega)$ mantém o valor quando ω^{**} varia; por isso, quaisquer dois pontos ω com o mesmo ω^* ou pertencem ambos a A (o caso do valor 1) ou pertencem ambos a A^- (o caso do valor 0) e, portanto, o conjunto A sujeita-se à nossa definição de cilindro.

Posto isso, vamos ver que os cilindros se prestam muito bem a serem manipulados dum modo útil. Com efeito, temos o

Corolário *8'.* «Dado um espaço-produto não-degenerado Ω, são cilindros o conjunto $O \leqslant \Omega$, o próprio Ω e qualquer conjunto que possa obter-se a partir de cilindros efectuando sobre estes quaisquer operações internas (mesmo combinadas) dos tipos aqui introduzidos.»

Demonstração. Recordemos que as operações internas aqui introduzidas são a complementação, a subtracção, a subtracção simétrica, a intersecção e a união (com o caso particular da adição). Nesta conformidade, a tese do corolário resulta do teorema 8 e das fórmulas 1) a 7).

Caso um conjunto contido em Ω seja um cilindro, podemos representá-lo pela letra C (sem ou com notação acompanhante), podemos classificar o conjunto-projecção C^* como *base ou con-*

junto marginal de C *no espaço-produto parcial* Ω^* e, além disso, podemos classificar a correspondente operação de projecção como *marginação de* C *com respeito ao espaço-produto parcial* Ω^{**}. Esta terminologia faz-nos aceitar melhor que se tenha classificado o conjunto marginado C como cilindro com *base* (contida) em Ω^* e que se tenha classificado Ω^* como espaço marginal de Ω (pois o corolário 8' institui Ω em cilindro e o texto que precede o exemplo 17 institui Ω^* em conjunto marginal de Ω).

Note-se que o corolário 8' institui $O^* \leqslant \Omega^*$ em base do cilindro $O \leqslant \Omega$ (e somente deste cilindro, isto em virtude das propriedades gerais da projecção).

Exemplo 20. Em seguida, vamos apresentar motivos adicionais para tornar plausível a terminologia aqui introduzida. Assim, caso Ω seja o espaço real corrente $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ e caso se escolha $X^* = X_1 \times X_2 = X_{1,2} = X_{(3)}$ e $X^{**} = X_3$, então a representação geométrica de qualquer cilindro $C \leqslant X$ num espaço tridimensional de Descartes será um lugar de rectas paralelas ao eixo das cotas, como quem diz um cilindro de geratrizes paralelas a X_3 no sentido da Geometria elementar, coincidindo a representação do conjunto marginal $C^* = C_{1,2} = C_{(3)} \leqslant X_{(3)}$ com a base de C em $X_{(3)}$ no sentido da Geometria elementar. Por outro lado, se $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, $X^* = X_1$ e $X^{**} = X_2 \times X_3 = X_{2,3} = X_{(1)}$, o tipo de representação geométrica acima referido dá um lugar de planos paralelos ao plano coordenado subtendido pelos eixos das ordenadas e das cotas, como quem diz um cilindro de planos geradores paralelos a $X_{(1)}$ no sentido da Geometria clássica, coincidindo a representação do conjunto marginal $C^* = C_1 \leqslant X_1$ com a base de C no sentido da Geometria clássica. Por fim, se Ω for o plano real $X = X_1 \times X_2$ e se fizermos $X^* = X_1$ e $X^{**} = X_2$, a representação geométrica de qualquer cilindro $C \leqslant X$ num plano de Descartes será um lugar de rectas paralelas ao eixo das ordenadas, coincidindo a representação do conjunto marginal $C^* = C_1 \leqslant X_1$ com a intersecção entre o lugar referido e o eixo das abcissas.

Exemplo 21. Caso o conjunto projectado A do texto subsequente a 39) seja um cilindro C, subsiste tudo quanto se afirmou a respeito da resolução da projecção global em projecções parciais, estas associativas e comutativas. Acresce que cada uma das projecções parciais, com excepção da última, corresponde obrigatoriamente a uma supremação parcial sobre um segundo membro do tipo de 39) que deixa permanecer certas coordenadas $\omega_{t^{**}}$, em relação às quais é independente a indicatriz do respetcivo conjunto de partida; cai-se assim na indicatriz dum cilindro e, correspondentemente, numa nova operação de projecção que é a marginação dum cilindro e ainda num novo conjunto-projecção que é a base dum cilindro. Em suma, temos **marginações parciais** *associativas e comutativas.*

Exercício 24. Dê a interpretação geométrica das propriedades comutativa e associativa, relativas a marginações parciais, quando o espaço-produto dado Ω for o espaço real corrente, figurado como espaço de Descartes.

Posto isso, vamos relacionar a indicatriz de qualquer cilindro C com a indicatriz da sua base C*. Temos a fórmula

$$I_C(\omega_t,\ t\varepsilon T) \equiv I_{C^*}(\omega_{t^*}, t^*\varepsilon T^*) \cdot I_{\Omega^{**}}(\omega_{t^{**}},\ t^{**}\varepsilon T^{**})$$

ou (41)

$$I_C(\omega) \equiv I_{C^*}(\omega^*) \cdot I_{\Omega^{**}}(\omega^{**})$$

ou ainda

$$I_C = I_{C^*} \cdot I_{\Omega^{**}}.$$

Justificação de 41). Comecemos por notar que o factor final de qualquer uma das alternativas de 41) é a constante 1 tomada em Ω^{**}, constante essa que se escreveu de modo tal que ω^{**} ou as suas coordenadas fizessem presença formal em ambos os membros das duas primeiras versões. Posto isso, seja qual for ω^*, não só o teorema 8 permite igualar $I_C(\omega)/I_{\Omega^{**}}(\omega^{**})$ e $\sup\limits_{\omega^{**}\varepsilon\Omega^{**}} I_C(\omega)$, como também a relação 39) permite igualar o último supremo a $I_{C^*}(\omega^*)$. Daí a fórmula 41).

3. **Propriedades da marginação**

No seguimento admitimos que todos os cilindros são do tipo referido no n.º *2.* Vamos juntar ao cilindro $C \leqslant \Omega$ outro cilindro $D \leqslant \Omega$ ou substituir esse cilindro C por cilindros $C_u \leqslant \Omega$, com o índice u a percorrer uma família U. Nesta conformidade, apresentamos a *relação*

(42)

a) Vale a igualdade $C = D$ entre cilindros se e só se valer a igualdade $C^* = D^*$ entre bases;

b) escolhido arbitrariamente um conjunto contido em Ω^*, ele será a base dum e dum só cilindro contido em Ω;

c) vale a relação $C \leqslant D$ entre cilindros se e só se valer a relação $C^* \leqslant D^*$ entre bases;

d) há disjunção entre os cilindros C e D se e só se houver disjunção entre as bases C^* e D^*;

e) $(\underset{u \in U}{V} C_u)^* = \underset{u \in U}{V} C^*_u$ *(propriedade distributiva da marginação com respeito à união).*

Justificação de 42).

a) É óbvio que $C = D$ implica $C^* = D^*$. Por outro lado, caso se tenha $C^* = D^*$, o teorema 3 e a fórmula 41) dão primeiro $I_C/I_{\Omega^{**}} = I_D/I_{\Omega^{**}}$ e em seguida $C = D$.

b) Escolhido arbitrariamente um conjunto $Z \leqslant \Omega^*$, corresponde a indicatriz $I_Z(\omega^*)$. O produto $I_Z(\omega^*) \cdot I_{\Omega^{**}}(\omega^{**}) \equiv I(\omega)$ será independente de ω^{**} e logo será a indicatriz $I_C(\omega)$ dum cilindro $C \leqslant \Omega$. Nesta conformidade, a fórmula 41) dá $I_{C^*}(\omega^*) \equiv I(\omega)/I_{\Omega^{**}}(\omega^{**}) \equiv$ $\equiv I_Z(\omega^*)$. Então $C^* = Z$ e a tese segue de *a*).

c) Sabemos, por 40 b), que $C \leqslant D$ implica $C^* \leqslant D^*$. Inversamente, se $C^* \leqslant D^*$, então o teorema 4 e a fórmula 41) dão sucessivamente $I_{C^*} \leqslant I_{D^*}$, $I_C \leqslant I_D$ e $C \leqslant D$.

d) Sabemos, por 40 a), que a disjunção entre C^* e D^* implica a disjunção entre C e D. Inversamente, se C e D forem disjuntos, o teorema 5 e a fórmula 41) dão sucessivamente $I_C I_D = 0$ e $I_{C^*} I_{D^*} = 0$, donde a disjunção entre C^* e D^*.

e) Temos uma transcrição da igualdade de 40 c), com a particularidade de o corolário 8' assegurar que $\underset{u \in U}{V} C_u$ venha a ser um cilindro contido em Ω.

Vamos acrescentar *mais algumas propriedades da marginação* através da fórmula

(43)

a) Caso os cilindros C_u *ou* as suas bases C^*_u sejam conjuntos disjuntos dois a dois, isto quando u percorre U, tem-se $\underset{u \in U}{\dot{\Sigma}} C^*_u = (\underset{u \in U}{\dot{\Sigma}} C_u)^*$ (*propriedade distributiva da marginação com respeito à adição*);

b) $(C^*)^- = (C^-)^*$ (*permutabilidade formal entre a marginação e a complementação*);

c) $\underset{u \in U}{\Lambda} C^*_u = (\underset{u \in U}{\Lambda} C_u)^*$ (*propriedade distributiva da marginação com respeito à intersecção*);

d) $C^* - D^* = (C - D)^*$ (*propriedade distributiva da marginação com respeito à subtracção*).

Justificação de 43).

a) Consequência imediata de 42 d) e 42 e) e do facto de $\underset{u \in U}{\dot{\Sigma}} C_u$ ser um cilindro.

b) As fórmulas 3), 2) e 41) dão $I_{(C^*)^-} = I_{\Omega^*} - I_{C^*} = (I_\Omega - I_C)/ /I_{\Omega^{**}} = I_{(C^-)^*}$, onde C^- é um cilindro, isto graças ao corolário 8'. Concluímos assim que $(C^*)^- = (C^-)^*$.

c) A fórmula 9 b), a alínea *b*) precedente e a relação 42 e) dão $\underset{u \in U}{\Lambda} C^*_u = [\underset{u \in U}{V} (C^-_u)^*]^- = (\underset{u \in U}{\Lambda} C_u)^*$, onde $\underset{u \in U}{\Lambda} C_u$ é um cilindro, isto graças ao corolário 8'.

d) A fórmula 11) e as alíneas *b*) e *c*) precedentes dão $C^* - D^* = C^* \wedge (D^-)^* = (C-D)^*$, onde $C-D$ é um cilindro, isto graças ao corolário 8'.

Exemplo 22. Podemos aplicar ao ponto genérico ω de Ω a permutação de coordenadas que coloca no princípio todas as coordenadas ω_{t^*}, com o dispositivo de entrada das diversas determinações de t^* herdado das coordenadas ω_t, e que coloca no fim todas as coordenadas $\omega_{t^{**}}$, com o dispositivo de entrada das diversas determinações de t^{**} também herdado das coordenadas ω_t. Deste modo e atendendo à hipótese de associatividade da multiplicação cartesiana, ω transforma-se no ponto genérico dum novo espaço $\tilde{\Omega} = (\underset{t^*\varepsilon T^*}{\times} \Omega_{t^*}) \times (\underset{t^{**}\varepsilon T^{**}}{\times} \Omega_{t^{**}}) = \Omega^* \times \Omega^{**}$, ponto genérico esse que será $\tilde{\omega} = (\omega^*, \omega^{**}) = ((\omega_{t^*}, t^* \varepsilon T^*), (\omega_{t^{**}}, t^{**} \varepsilon T^{**}))$. Agora, escolhido arbitrariamente um cilindro $C \leqslant \Omega$ com base $C^* \leqslant \Omega^*$ e com geratrizes paralelas a Ω^{**}, a permutação de coordenadas acima referida não só converte C num conjunto $\tilde{C} \leqslant \tilde{\Omega}$, como também institui a relação entre indicatrizes $I_C(\omega) \equiv I_{\tilde{C}}(\tilde{\omega})$ (ω e $\tilde{\omega}$ transformados um do outro). Como estamos a admitir que C é um cilindro, a identidade posta e o teorema 8 provam que a função $I_{\tilde{C}}$ é independente da escolha de ω^{**}. Concluímos que $\tilde{C}$ é um cilindro com base $\tilde{C}^* \leqslant \Omega^*$ e com geratrizes paralelas a Ω^{**}. Posto isso, a fórmula 41) dá a relação

$$I_{C^*}(\omega^*) \cdot I_{\Omega^{**}}(\omega^{**}) \equiv I_C(\omega) \equiv I_{\tilde{C}}(\tilde{\omega}) \equiv I_{\tilde{C}^*}(\omega^*) \cdot I_{\Omega^{**}}(\omega^{**}),$$

donde

$$I_{C^*}(\omega^*) \equiv I_{\tilde{C}^*}(\omega^*).$$

Daí, do teorema 3 e da fórmula 29) inferimos primeiro que $C^* = \tilde{C}^*$ e, em seguida, a relação $\tilde{C} = C^* \times \Omega^{**}$; assim podemos afirmar que o cilindro transformado de C é igual ao produto da base de C pelo espaço marginal a que são paralelas as geratrizes.

Exercício 25. Deduza a propriedade distributiva da marginação com respeito à subtracção simétrica, expressa através da relação $C^* \Delta D^* = (C \Delta D)^*$, onde $C \Delta D$ é um cilindro.

4. Intersecção e união externas

Neste n.º final do § 8, vamos manter as convenções do n.º 1 e vamos referir alguns casos em que convém considerar simultaneamente vários cilindros, todos contidos em Ω e com bases contidas em espaços marginais diversificados.

Nesta conformidade, suponhamos que, seja qual for $t \epsilon T$, corresponde um cilindro $C_t \leqslant \Omega$ com base $C_t^* \leqslant \Omega_t$ e, portanto, com geratrizes paralelas ao espaço marginal $\Omega_{(t)}$ que se obtém, suprimindo somente o factor Ω_t do espaço-produto Ω. Se u for o índice t redesignado e se Ω' e Ω'' forem os espaços-produtos parciais correspondentes aos índices t respectivamente anteriores e posteriores a u (com supressão de Ω' se u for o primeiro t e com supressão de Ω'' se u for o último t), então as fórmulas 41) e 29) e a associatividade da multiplicação cartesiana dão

$$I_{C_u} = I_{C_u^*} \cdot I_{\Omega_{(u)}} = I_{\Omega'} \cdot I_{C_u^*} \cdot I_{\Omega''}$$

(com supressão de $I_{\Omega'}$ caso se tenha suprimido Ω' e com supressão de $I_{\Omega''}$ caso se tenha suprimido Ω''), donde a igualdade entre conjuntos $C_u = \Omega' \times C_u^* \times \Omega''$, a qual pode escrever-se sob a seguinte forma, válida para qualquer u:

$$C_u = \mathop{\times}_{t \epsilon T} A_{t,u}, \quad \text{com} \quad A_{u,u} = C_u^*$$

e

$$\text{com} \quad A_{t,u} = \Omega_t \quad \text{para} \quad t \neq u.$$

Posto isso, a fórmula 37) e a propriedade absorvente da intersecção conduzem a

$$\bigwedge_{t \epsilon T} C_t = \bigwedge_{u \epsilon T} C_u = \mathop{\times}_{t \epsilon T} \left(\bigwedge_{u \epsilon T} A_{t,u} \right) = \mathop{\times}_{t \epsilon T} C_t^* .$$

Em suma, vale a fórmula

$$\bigwedge_{t \epsilon T} C_t = \bigtimes_{t \epsilon T} C_t^* \tag{44}$$

e concluímos assim que, nas condições admitidas, a *intersecção dos cilindros* C_t *é igual ao produto das suas bases* C_t^*. Nestes termos, a falta de distinção entre cilindros e as suas bases pode levar a confundir as operações de intersecção e de multiplicação cartesiana (como acontecia por vezes em tempos não muito distantes), confusão essa que não convém tolerar para certos propósitos que temos em vista.

Exercício 26. Supondo que a família T(t) é a família $T = \{1, 2, \ldots, M\}$, com $M \geqslant 2$, mostre que é igual a $2(2^{M-1} - 1)$ o número de tipos de cilindros contidos em $\Omega = \bigtimes_{t \epsilon T} \Omega_t$, que correspondem às escolhas possíveis para os espaços onde podem estar contidas as respectivas bases.

Posto isso, sabemos que as operações de intersecção e de união da Secção A são seguramente operações internas. Podemos redesignar a multiplicação cartesiana geral de b) do n.º **5** do § 7 por *intersecção externa*, esta mais complicada do que a sua homónima interna em todos os casos em que houver mais do que um *factor ou conjunto secante externo* porque, em tais casos, o argumento ω_t do conjunto secante genérico varia com t; em especial, não pode haver pontos pertencentes a mais do que um conjunto secante externo e, por isso, não pode haver nem propriedade monotónica nem propriedade absorvente para a intersecção externa, à qual, recordemo-lo, negámos a propriedade comutativa e atribuímos a propriedade associativa.

Prosseguindo na ordem de ideias aqui encetada: vamos escolher arbitrariamente conjuntos $A_t \leqslant \Omega_t$, um para cada $t \varepsilon T$; vamos considerar o conjunto $A \leqslant \Omega = \bigtimes_{t \epsilon T} \Omega_t$, formado pelos pontos $\omega = (\omega_t, t \varepsilon T)$ que tenham a propriedade de fazerem corresponder a *algum* t (um ou mais) uma coordenada $\omega_t \varepsilon A_t$; vamos chamar a esse conjunto A *união externa* dos conjuntos A_t (quando t percorre T); vamos representá-lo por $\dot{V}_{t\epsilon T} A_t$ ou, mais abreviadamente, por $\dot{V}_t A_t$ ou, ainda mais abreviadamente, por $\dot{V} A_t$; vamos designar os conjuntos A_t por *parcelas externas* da respectiva união; vamos chamar *união externa* à operação que converte os A_t em $\dot{V}_t A_t$. Aqui subentende-se que $\dot{V}_t A_t = O < \Omega$ caso se tenha $A_t = O_t < \Omega_t$ para cada $t\varepsilon T$. Claro que uma tal união externa não só tem sempre *parcelas em correspondência com os elementos* t *da família prefixada* T, como também se distingue de qualquer homónima interna salvo no caso de haver uma só parcela.

Passando para indicatrizes, vale a seguinte fórmula (no estilo de 36)):

$$I_{\dot{V}_{t\epsilon T} A_t} (\omega_t, t\varepsilon T) \equiv \sup_{t\epsilon T} I_{A_t} (\omega_t) \qquad (45)$$

ou

$$I_{\dot{V}_{t\epsilon T} A_t} = \sup_{t\epsilon T} I_{A_t} \cdot$$

Justificação de 45). Qualquer primeiro membro vale 0 se e só se o respectivo ponto $(\omega_t, t\varepsilon T)$ não tiver nenhuma coordenada $\omega_t \varepsilon A_t$, por sua vez se e só se o dito ponto atribuir o valor 0 ao correspondente segundo membro.

Em seguida, uma análise semelhante à feita a propósito da intersecção externa mostra que não pode haver nem propriedade monotónica nem propriedade absorvente para a união externa, que se deve rejeitar a propriedade comutativa e que, além disso, convém aceitar a propriedade associativa. Por outro lado, a analogia entre as duas operações externas permite construir *igualdades de Morgan, no estilo da fórmula* 9), *a saber:*

$$a) \ (\dot{V}_t A_t)^- = \times_t A_t^- \ \text{ ou } \ \dot{V}_t A_t = (\times_t A_t^-)^- \qquad (46)$$

e

$$b) \ (\times_t A_t)^- = \dot{V}_t A_t^- \ \text{ ou } \ \times_t A_t = (\dot{V}_t A_t^-)^- \ ,$$

com justificação decalcada da de 9), salvo no pormenor do uso de 7) e 6) vir a ser substituído pelo uso de 45) e 36), isto para não falar na adaptação dos argumentos do tipo ω.

Exemplo 23. Uma consequência curiosa de 46 a) é que o segundo membro de 31'*), com $A_{n,2} = A^-_{n,1}$ para cada n, conduz, atendendo ao exemplo 12, a um desenvolvimento da união externa $\dot{V}_{n} A_{n,1}$.

Vejamos mais algumas *propriedades da intersecção externa e da união externa.* Para começar, a desigualdade óbvia

$$\inf_t I_{A_t} \leqslant \sup_t I_{A_t} ,$$

as fórmulas 36) e 45) e o teorema 4 dão a relação

$$\underset{t\epsilon T}{\times} A_t \leqslant \underset{t\epsilon T}{\dot{V}} A_t,$$

a qual tem o seu paralelo na relação

$$\underset{t\epsilon T}{\Lambda} A_t \leqslant \underset{t\epsilon T}{V} A_t,$$

esta concernente a operações internas e decorrente das respectivas propriedades monotónicas.

Em seguida, vamos igualar cada um dos conjuntos A_t à base C^*_t dum cilindro $C_t \leqslant \Omega$, com geratrizes paralelas ao espaço marginal $\Omega_{(t)}$ (vejam-se a propriedade 42 b) e o significado de $\Omega_{(t)}$, estabelecido no texto introdutório deste n.º). Então, temos a fórmula

$$\underset{t\epsilon T}{\dot{V}} A_t = \underset{t\epsilon T}{V} C_t, \tag{47}$$

que é do mesmo estilo de 44) no sentido de relacionar duas operações homónimas, uma externa e a outra interna, isto à custa dos conjuntos A_t e dos cilindros correspondentes C_t tais que $C^*_t =$ $= A_t$ para cada $t\epsilon T$.

Justificação de 47). A fórmula 9 a), a fórmula 44) com C_t^- em lugar de C_t, a propriedade 43 b), a fórmula 46 a) com C_t^* em lugar de A_t e, por fim, as igualdades $C_t^* = A_t$ (acima admitidas) conduzem a

$$\bigvee_t C_t = (\bigwedge_t C_t^-)^- = [\times_t (C^*_t)^-]^- = \dot{\bigvee_t} C^*_t = \dot{\bigvee_t} A_t.$$

Claro que há outras vias para justificar 47).

Exemplo 24. Se passarmos para o espaço $\tilde{\Omega} = \Omega^* \times \Omega^{**}$ do exemplo 22, obtido a partir de Ω por uma permutação (fixa) das coordenadas do ponto genérico ω, esta seguida do recurso à associatividade da multiplicação cartesiana, sabemos que qualquer cilindro $C \leqslant \Omega$ com base $C^* \leqslant \Omega^*$ se transforma no novo cilindro $\tilde{C} = C^* \times \Omega^{**}$, onde $\tilde{C}^* = C^*$, conjunto este que vamos instituir em única parcela eventualmente não-vazia duma união externa (obrigatoriamente com duas parcelas), a qual, atendendo a 47), ficará igual a $\tilde{C}$. Nestes termos, seja qual for o cilindro $C \leqslant \Omega$, o novo cilindro $\tilde{C}$ reduz-se a uma união externa especial.

Exercício 27. Dê a interpretação geométrica da fórmula 47) quando os conjuntos A_t são intervalos lineares em número de 2 ou 3 e quando o espaço-produto Ω é o plano real ou o espaço real corrente, figurado num espaço de Descartes a 2 ou 3 dimensões. Considere o caso geral e o caso particular em que $A_t = \{0\}$ para cada t.

§ 9 — OPERAÇÃO DE CORTE

1. Generalidades

Retomemos o espaço-produto não-degenerado $\Omega = \underset{t\varepsilon T}{\times} \Omega_t$, de ponto genérico $\omega = (\omega_t, t\varepsilon T)$, e os espaços marginais

$$\Omega^* = \underset{t^*\varepsilon T^*}{\times} \Omega_{t^*} \text{ e } \Omega^{**} = \underset{t^{**}\varepsilon T^{**}}{\times} \Omega_{t^{**}},$$

de pontos genéricos $\omega^* = (\omega_{t^*}, t^*\varepsilon T^*)$ e $\omega^{**} = (\omega_{t^{**}}, t^{**}\varepsilon T^{**})$, marginais de Ω um em relação ao outro que foram introduzidos através de 38).

Seja $\bar{\omega}^* = (\bar{\omega}_{t^*}, t^*\varepsilon T^*)\varepsilon\Omega^*$ um ponto fixo e seja $\bar{C} \leqslant \Omega$ o cilindro com base $\bar{C}^* \leqslant \Omega^*$ igual ao conjunto elementar $\{\bar{\omega}^*\}$. Então, escolhido arbitrariamente um conjunto $A \leqslant \Omega$, podemos formar o novo conjunto $(A \wedge \bar{C})^{**} \leqslant \Omega^{**}$: que se obtém, projectando a intersecção de A com $\bar{C}$ sobre o espaço marginal Ω^{**}; que vamos representar abreviadamente por $A/\bar{\omega}^*$; a que vamos chamar *corte (feito) no conjunto A pelo ponto* $\bar{\omega}^*$, designação esta que vamos atribuir também à operação que transforma A em $A/\bar{\omega}^*$. Quanto a A, será o *conjunto cortado* e, quanto a $\bar{\omega}^*$, será o *ponto cortante.*

Exemplo 25. Sendo Ω o espaço coincidente com o plano real $X = X_1 \times X_2$, de ponto genérico $x = (x_1, x_2)$, vamos tomar $X^* = X_1$, $X^{**} = X_2$, um ponto $\bar{x}^* = \bar{x}_1 \varepsilon X_1$ e um conjunto $A \leqslant X$ cuja figuração num plano de Descartes seja uma região plana limitada por um contorno fechado e *quase-liso.* † Nesta conformidade, $\bar{C}$ será representado pela recta de equação $x_1 = \bar{x}_1$ e $A/\bar{x}_1$ será representado pela figura que se obtém, projectando (no sentido da Geometria clássica) a intersecção da imagem de A com a recta referida sobre a recta de equação $x_1 = 0$, esta coincidente com o eixo das ordenadas. Por outro lado, se particularizarmos para $\bar{x}_1 = 1$ [ou 2], se escolhermos $A = \{(1,1), (2,2)\}$ e se juntarmos $B = \{(1,3), (2,2)\}$, então $A/\bar{x}_1 = \{1\}$ [ou $\{2\}$] $\leqslant X_2$ e $B/\bar{x}_1 = \{3\}$ [ou $\{2\}$] $\leqslant X_2$, donde concluímos que: conservando o ponto cortante, *os cortes podem ser disjuntos quando os conjuntos cortados não o são; conjuntos cortados diferentes podem conduzir a cortes iguais; a relação* $A/\bar{\omega}^* \leqslant B/\bar{\omega}^*$ *pode ser válida mesmo que falhe a relação homóloga* $A \leqslant B$.

Exercício 28. Dê a interpretação geométrica do corte $A/\bar{x}^*$ quando Ω for o espaço real corrente $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ (figurado como espaço de Descartes), quando A for uma região com imagem limitada por uma superfície fechada e *quase-lisa* † e quando, por fim, X^* for igual ou a X_1 ou a $X_{(1)} = X_2 \times X_3$.

2. Indicatriz do corte

Posto isso, vamos ver como, dado o ponto $\bar{\omega}^*$ e escolhido o conjunto A, as indicatrizes dos conjuntos envolvidos acompanham

---

† Uma curva [ou superfície] diz-se *lisa* se e só se ela tiver recta [ou plano] tangente cuja direcção [ou orientação] varia continuamente ao longo dela. Por outro lado, a curva [ou superfície] diz-se *quase-lisa* se e só se ela se compuser dum número finito de partes lisas, destituídas de cruzamentos e de soluções de continuidade.

a operação de corte. Temos a seguinte fórmula, talvez surpreendente pela sua singeleza intrínseca:

$$I_{A/(\bar{\omega}_{t*},\, t*\varepsilon T*)}(\omega_{t**},\, t^{**}\varepsilon T^{**}) =$$

$$= [I_A(\omega_t,\, t\varepsilon T)]_{(\omega_{t*},\, t*\varepsilon T*) \,=\, (\bar{\omega}_{t*},\, t*\varepsilon T*)} \tag{48}$$

ou, mais abreviadamente,

$$I_{A/\bar{\omega}*}(\omega^{**}) = [I_A(\omega)]_{\omega* = \bar{\omega}*}$$

ou, ainda mais abreviadamente,

$$I_{A/\bar{\omega}*} = (I_A)_{\omega* = \bar{\omega}*},$$

onde as igualdades postas em índice significam que os argumentos variáveis ω_{t*} da função I_A devem ser substituídos pelas determinações particulares correspondentes ao ponto cortante.

Justificação de 48). Como $A/\bar{\omega}^* = (A \wedge \bar{C})^{**}$, a fórmula 39) (com os papéis de Ω^* e Ω^{**} trocados), a fórmula 6'), a fórmula 41) e a convenção $\bar{C}^* = \{\bar{\omega}^*\}$ dão a relação

$$I_{A/\bar{\omega}*}(\omega^{**}) = \sup_{\omega*\varepsilon\Omega*} [I_A(\omega) \cdot I_{\{\bar{\omega}*\}}(\omega^*) \cdot I_{\Omega**}(\omega^{**})],$$

de modo que só falta provar que o supremo formado se identifica com o segundo membro da segunda versão de 48). Tal sucede efectivamente porque, escolhido arbitrariamente ω^{**}, o supremo vale 1 se e só se $\omega^* = \bar{\omega}^*$ simultãneamente com $I_A(\omega)$ igual a 1, por sua vez se e só se $[I_A(\omega)]_{\omega* = \bar{\omega}*}$ tomar o valor 1, c. q. d.

Seguem algumas *propriedades da operação de corte.*

Para começar, desde que T^* abranja mais do que um índice t^*, o segundo membro da primeira versão de 48) não é alterado se substituirmos a fixação global de todas as coordenadas ω_{t*} nas correspondentes determinações $\bar{\omega}_{t*}$ por fixações parciais tais que, por um lado, cada uma delas envolva certas coordenadas ω_{t*} (uma ou mais) e que, por outro lado, a última acabe por apanhar as coordenadas ω_{t*} remanescentes, fixações parciais essas que podem associar-se ou trocar de ordem sem prejuízo do resultado final, isto na qualidade de operações de fixação, já que as indicatrizes afectadas por elas se vão modificando. Por outro lado, cada uma das fixações parciais aqui referidas conduz a um corte parcial, a primeira de A, a segunda do primeiro corte parcial de A, a terceira do resultado da segunda, etc., e a última com resultado igual a $A/\bar{\omega}^*$. Por isso, o *corte* (*global*) tratado em 48) *pode resolver-se em cortes parciais que serão associativos e comutativos,* isto na qualidade de operações já que os conjuntos cortados se vão modificando.

Exercício 29. Dê a interpretação das propriedades comutativa e associativa, relativas a cortes parciais, quando o espaço-produto Ω for o espaço real corrente, figurado como espaço de Descartes.

3. **Outras propriedades**

Sempre que for conveniente, vamos juntar ao conjunto A do n.º **2** outro conjunto $B \leqslant \Omega$ ou então vamos substituir esse A por conjuntos $A_u \leqslant \Omega$, com o índice u a percorrer uma família U. Para já, apresentamos a *relação*

(49)

a) Seja qual for $\bar{\omega}^*$, tem-se $\Omega/\bar{\omega}^* = \Omega^{**}$;

b) $A/\bar{\omega}^* = O^{**} \leqslant \Omega^{**}$ se e só se ou $A = O$ ou todo o ponto $\omega \varepsilon A$ tiver coordenadas ω_{t*} tais que $\omega_{t*} \neq \bar{\omega}_{t*}$ para algum $t^* \varepsilon T^*$;

c) seja qual for o ponto $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_t, t \varepsilon T) \varepsilon \Omega$, tem-se $\bar{\omega} \varepsilon A$ se e só se $\bar{\omega}^{**} = (\bar{\omega}_{t**}, t^{**} \varepsilon T^{**}) \varepsilon A/\bar{\omega}^*$;

d) seja qual for $\bar{\omega}^*$, a relação $A \leqslant B$ implica a relação $A/\bar{\omega}^* \leqslant \leqslant B/\bar{\omega}^*$;

e) seja qual for $\bar{\omega}^*$, a disjunção entre A e B implica a disjunção entre $A/\bar{\omega}^*$ e $B/\bar{\omega}^*$.

Justificação de 49). Em seguida recorremos sistematicamente à fórmula 48).

a) $I_{\Omega/\bar{\omega}^*} = 1$ (constante 1 em Ω^{**}) .

b) A condição do enunciado é equivalente a $I_{A/\bar{\omega}^*} = 0$ (constante 0 em Ω^{**}).

c) $I_{A/\bar{\omega}^*}(\bar{\omega}^{**}) = I_A(\bar{\omega})$.

d) Atendendo ao teorema 4, temos $I_A \leqslant I_B$, donde

$(I_A)_{\omega^*=\bar{\omega}^*} \leqslant (I_B)_{\omega^*=\bar{\omega}^*}$ ou seja $I_{A/\bar{\omega}^*} \leqslant I_{B/\bar{\omega}^*}$.

e) Atendendo ao teorema 5, temos $I_A \cdot I_B = 0$, donde

$(I_A)_{\omega^*=\bar{\omega}^*} \cdot (I_B)_{\omega^*=\bar{\omega}^*} = 0$ ou seja $I_{A/\bar{\omega}^*} \cdot I_{B/\bar{\omega}^*} = 0$.

Apresentamos *mais algumas propriedades da operação de corte* através da seguinte relação, toda ela com $\bar{\omega}^*$ fixo:

(50)

a) $(A^-)/\bar{\omega}^* = (A/\bar{\omega}^*)^-$ (*permutabilidade formal entre o corte e a complementação*);

b) $(\bigvee_{u \in U} A_u)/\bar{\omega}^* = \bigvee_{u \in U} (A_u/\bar{\omega}^*)$, com o caso particular do símbolo Σ em lugar de $\bigvee$ (nos dois membros) na hipótese de os conjuntos A_u serem disjuntos dois a dois (*propriedade distributiva do corte com respeito à união, com o caso particular da adição*);

c) $(\bigwedge_{u \in U} A_u)/\bar{\omega}^* = \bigwedge_{u \in U} (A_u/\bar{\omega}^*)$ (*propriedade distributiva do corte com respeito à intersecção*);

d) $(A - B)/\bar{\omega}^* = (A/\bar{\omega}^*) - (B/\bar{\omega}^*)$ (*propriedade distributiva do corte com respeito à subtracção*).

Justificação de 50).

a) Atendendo às fórmulas 3) e 48), temos

$I_{(A^-)/\bar{\omega}*} = (1-I_A)_{\omega*=\bar{\omega}*} = I_{(A/\bar{\omega}*)^-}$ e a tese segue.

b) Recordando a definição de $\overline{C}$, a definição de corte, a fórmula 13) e a propriedade 40c), obtemos $(\underset{u}{V} A_u)/\bar{\omega}* = [\underset{u}{V}(A_u \Lambda \overline{C})]** = \underset{u}{V}(A_u/\bar{\omega}*)$. Em seguida, obtemos o caso particular recorrendo à propriedade 49 e).

c) Atendendo à fórmula 9 b), aos resultados 50 a) e b), à fórmula 9 a) e à primeira propriedade da complementação, obtemos

$$(\underset{u}{\Lambda} A_u)/\bar{\omega}* = [(\underset{u}{V} A_u^-)/\bar{\omega}*]^- = \underset{u}{\Lambda}(A_u^-/\bar{\omega}*)^- = \underset{u}{\Lambda}(A_u/\bar{\omega}*).$$

d) Atendendo à fórmula 11) e aos resultados 50 c) e a), obtemos $(A-B)/\bar{\omega}* = (A/\bar{\omega}*)\Lambda(B^-/\bar{\omega}*) = (A/\bar{\omega}*)-(B/\bar{\omega}*)$. — Acrescentemos que é possível justificar b), c) e d) também por via de indicatrizes.

Exercício 30. Deduza a propriedade distributiva do corte com respeito à subtracção simétrica, expressa através da relação

$$(A \Delta B)/\bar{\omega}* = (A/\bar{\omega}*)\,\Delta\,(B/\bar{\omega}*).$$

Por fim, dois exemplos e mais dois exercícios.

Exemplo 26. Vale a seguinte asserção: «Escolhidos arbitrariamente um cilindro C e um ponto pertencente ao espaço marginal a que são paralelas as geratrizes, então a base de C coincide com o corte feito em C pelo ponto escolhido.» — Com efeito, suponhamos que C tem base $C** \leqslant \Omega**$ e geratrizes paralelas a $\Omega*$.

Então, escolhido o ponto $\bar{\omega}*\varepsilon\Omega*$, a fórmula 41) dá

$$I_C(\omega) \equiv I_{C**}(\omega**)\cdot I_{\Omega*}(\omega*);$$

logo a fórmula 48) dá

$$I_{C/\bar{\omega}^*}(\omega^{**}) \equiv I_{C^{**}}(\omega^{**}),$$

donde a tese.

Exemplo 27. Seja qual for o conjunto $A \leqslant \Omega$, ele terá transformado $\tilde{A} \leqslant \tilde{\Omega}$, com o mesmo $\tilde{\Omega} = \Omega^* \times \Omega^{**}$ do exemplo 22. Então, seja qual for $\omega^{**} \varepsilon \Omega^{**}$, a fórmula 48) permite escrever

$$I_{\tilde{A}/\bar{\omega}^*}(\omega^{**}) = [I_{\tilde{A}}(\tilde{\omega})]_{\omega = \bar{\omega}^*} = [I_A(\omega)]_{\omega^* = \bar{\omega}^*} = I_{A/\bar{\omega}^*}(\omega^{**}),$$

donde a igualdade entre conjuntos $\tilde{A}/\bar{\omega}^* = A/\bar{\omega}^*$. Caso $\tilde{A}$ seja da forma $P^* \times Q^{**}$, com $P^* \leqslant \Omega^*$ e com $Q^{**} \leqslant \Omega^{**}$, então, seja qual for ω^{**}, a fórmula 29) dá

$$I_{\tilde{A}/\bar{\omega}^*}(\omega^{**}) = [I_{P^*}(\omega^*) \cdot I_{Q^{**}}(\omega^{**})]_{\omega^* = \bar{\omega}^*},$$

que vale 0 ou $I_{Q^{**}}(\omega^{**})$ conforme $\bar{\omega}^*$ pertencer a $(P^*)^-$ ou a P^*.

Concluímos não só que

$$A/\bar{\omega}^* = O^{**} \quad \text{se} \quad \bar{\omega}^* \varepsilon (P^*)^-,$$

como também que

$$A/\bar{\omega}^* = Q^{**} \quad \text{se} \quad \bar{\omega}^* \varepsilon P^*.$$

Exercício 31. Prove que $A/\bar{\omega}^* = \Omega^{**}$ se e só se estiver contido em A o cilindro de base elementar $\{\bar{\omega}^*\}$.

Exercício 32. Escolhidos arbitrariamente o conjunto $A \leqslant \Omega$ e o ponto $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_t, t \varepsilon T) \varepsilon \Omega$, caracterize os conjuntos

$$[(A/\bar{\omega}^*) \times (A/\bar{\omega}^{**})]/\bar{\omega}^* \quad \text{e} \quad [(A/\bar{\omega}^*) \times (A/\bar{\omega}^{**})]/\bar{\omega}^{**}.$$

CAPÍTULO II

OPERAÇÕES A INCIDIR SOBRE CLASSES

SECÇÃO A

OPERAÇÕES INTERNAS

§ 10 — GENERALIDADES SOBRE CLASSES EXTRAÍDAS DUM ESPAÇO DADO

1. A noção de classe

Escolhido arbitrariamente o espaço $\Omega(\omega)$, abreviadamente Ω, podemos considerar o conjunto genérico $A \leqslant \Omega$ como ponto genérico dum *novo espaço que vamos representar pelo símbolo* $2^{\Omega}(A)$, abreviadamente 2^{Ω}, cuja plausibilidade procuramos certificar um pouco mais adiante. Nestes termos, os conjuntos $A \leqslant \Omega$ são passados para pontos $A \varepsilon 2^{\Omega}$ e podem servir para formar novos conjuntos $K \leqslant 2^{\Omega}$, conjuntos estes a que vamos chamar **classes,** a fim de facilitar a distinção entre eles e os conjuntos antigos no caso de se desejar omitir a referência expressa aos espaços em que uns e outros estão contidos.

É óbvio que as classes aqui introduzidas devem respeitar as convenções e definições sobre conjuntos contidos num espaço dado. Assim haverá uma e só uma classe desprovida de pontos $A \varepsilon 2^{\Omega}$, a que vamos chamar *classe vazia,* subentende-se contida em 2^{Ω}. Todas as classes restantes serão *não-vazias: singulares* ou *elementares* na hipótese de abrangerem um elemento único A e não-singulares ou não-elementares nas demais hipóteses. Podemos exemplificar com a classe elementar $\{O\}$ cujo único conjunto [ou ponto] é $O \leqslant \Omega$ [ou ε 2^{Ω}].

Posto isso, dada uma classe K, o seu *complemento* ou *classe complementar* K^- será formado por todos os $A \varepsilon 2^\Omega$ que não pertençam a K. Por outro lado, dadas duas classes K e L tais que ou K seja a classe vazia ou $A \varepsilon K$ imponha $A \varepsilon L$: escrevemos $K \leqslant L$ ou $L \geqslant K$, dizemos que K está contida em L ou L contém K e classificamos K como *subclasse* ou L como *sobreclasse*, uma e outra *imprópria* se $K = L$ e *própria* nos demais casos. Teremos a *igualdade entre classes* $K = L$ e na hipótese de valer simultaneamente $K \leqslant L$ *e* $L \leqslant K$ e teremos a *desigualdade entre classes* $K \neq L$ em todas as demais hipóteses.

Em face do exposto, igualdades do tipo $K = \{ A, A', A'', \ldots \}$ ou (outra modalidade) do tipo $K = \{$ A sujeito a uma certa relação $\}$ adquirem significados que podemos considerar como óbvios.

Dada uma família formada pelas classes K_t, com o índice t a percorrer uma família T, eventualmente uma sequência ou uma sucessão, podemos instituí-las em *classes secantes* e podemos formar a *intersecção* $\underset{t \epsilon T}{\Lambda} K_t$ ou $\underset{t}{\Lambda} K_t$ ou ΛK_t, que não é senão a classe formada pelos A que tenham a propriedade de pertencerem simultâneamente a todas as classes secantes. Definida assim a (operação de) intersecção, podemos prosseguir nesta *adaptação das relações* **internas** *entre conjuntos ao caso do espaço* 2^Ω passando para a *união de classes, disjunção entre classes, adição de classes* e *subtracção* (*corrente* ou *simétrica*) *entre classes*. Todavia, podemos evitar o trabalho de pormenor considerando que *as relações aqui citadas se subordinam às relações precedentes* mediante a fórmula 9), o exemplo 3, a fórmula 11) e o exemplo 7.

Exemplo 28. Supondo que $\Omega(\omega)$ é a recta real X(x), tomem-se os conjuntos $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$ e $A_3 = \{1,2\}$ e formem-se as classes $K_1 = \{A_1, A_2\}$ e $K_2 = \{A_3\}$. Embora o conjunto A_3 não seja disjunto nem de A_1 nem de A_2, as classes K_1 e K_2 resultam disjuntas entre si e terão a soma $K_1 + K_2 = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Observação. Não há qualquer dificuldade em adaptar a uma classe $K \leqslant 2^\Omega$ a noção da correspondente (função) indicatriz que será, com o novo simbolismo, uma função $I_K(A)$ com o valor 1 ou 0 conforme tivermos $A \varepsilon K$ ou $A \varepsilon K^-$.

2. **Os espaços Ω e 2^{Ω}.**

Caso o espaço original $\Omega(\omega)$ tenha um número de pontos $M < +\infty$, então qualquer indicatriz $I(\omega)$ tem um domínio com M pontos e, portanto, há tantas indicatrizes distintas entre si quantos os modos de escolher M números independentemente uns dos outros e por forma que cada um deles ou seja 0 ou seja 1. Daí e do teorema 3 concluímos que existem 2^M conjuntos $A \leqslant \Omega$ e logo 2^M pontos $A \varepsilon 2^{\Omega}$. Este facto não só nos faz aceitar melhor o simbolismo 2^{Ω} para o novo espaço introduzido no n.º **1**, como também nos mostra, atendendo à desigualdade $2^M > M$, que 2^{Ω} tem mais pontos do que Ω. Esta conclusão é apenas um caso particular do seguinte

Teorema 9. «A classe formada por todos os conjuntos contidos num espaço dado é uma classe que tem sempre potência superior à potência desse espaço.»

Demonstração. Dado o espaço Ω, a classe referida no enunciado fica equiparada ao novo espaço 2^{Ω}. Nestes termos, a correspondência entre os pontos $\omega \varepsilon \Omega$ e os pontos $\{\omega\}$ $\varepsilon 2^{\Omega}$ é uma correspondência biunívoca e recíproca, a qual esgota Ω e deixa de fora todos os pontos $A \varepsilon 2^{\Omega}$ que não sejam conjuntos elementares contidos em Ω. Então, conforme é sabido da teoria dos conjuntos: ou Ω é equivalente a 2^{Ω} e logo a potência de 2^{Ω} resulta igual à de Ω; ou não há equivalência e logo a potência de 2^{Ω} resulta superior à de Ω. Pos isso, a tese ficará provada se conseguirmos demonstrar que é absurdo admitir a equivalência entre Ω e 2^{Ω} ou, atendendo ao tipo de correspondência existente entre conjuntos A e indicatrizes definidas em Ω, que é absurdo abmitir a equivalência entre o conjunto dos possíveis pontos ω e o conjunto das possíveis indicatrizes $I(\omega)$.

Ora, admitida uma tal equivalência, redesignemos por ξ o ponto genérico de Ω e representemos por $I_{\xi}(\omega)$ a indicatriz correspondente a ξ. Seja qual for a determinação escolhida para ξ, podemos fazer $\omega = \xi$ e obter assim um número $I_{\xi}(\xi)$ ou igual a 0 ou igual a 1.

Quando ξ percorre Ω, resulta uma função $1 - I_\xi(\xi)$ que não deixa de ser uma indicatriz $I(\xi)$ ou $I(\omega)$ e que não pode coincidir com nenhuma das funções $I_\xi(\omega)$. Isto porque, seja qual for ξ, tem-se sempre a desigualdade $I(\omega) \neq I_\xi(\omega)$ para $\omega = \xi$. Portanto, as funções $I_\xi(\omega)$, por hipótese todas as indicatrizes possíveis em Ω, deixam de fora certas indicatrizes definidas em Ω. Está assim feita a redução ao absurdo por nós pretendida (isto por um processo inspirado no conhecido método da diagonal, devido a Cantor), c. q. d.

§ 11 — CLASSES ESTABILIZADAS, ÁLGEBRAS - σ E ESPAÇOS MENSURÁVEIS

1. A noção de classe estabilizada

Supondo dado o espaço $\Omega(\omega)$, comecemos por algumas definições relativas a classes não-vazias e formadas por conjuntos contidos em Ω.

1.ª definição. Uma classe não-vazia K diz-se *fechada com respeito a certas operações internas* (subentende-se sobre conjuntos contidos em Ω) se e só se pertencer a K o resultado das operações em causa, quando efectuadas sobre conjuntos pertencentes a K.

2.ª definição. Dada uma classe não-vazia K fechada com respeito a certas operações internas, qualquer outra classe não-vazia diz-se *do mesmo tipo que* K se e só se ela for também fechada com respeito às operações internas em causa.

3.ª definição. Uma classe não-vazia K classifica-se como classe *estabilizada com respeito a certas operações internas* se e só se ela for fechada com respeito a essas operações e, além disso, existir um conjunto fixo A_0, contido em Ω e pertencente a todas as classes do mesmo tipo que K. Chama-se *elemento estabilizador* a todo o conjunto A_0 que esteja nas condições aqui referidas.

Exemplo 29. Considere-se uma classe não-vazia K fechada com respeito à subtracção, quer dizer tal que $A \varepsilon K$ e $B \varepsilon K$ implica $A - B \varepsilon K$. Então, existe $A \varepsilon K$, pode tomar-se $B = A$ e resulta $O =$

$A - A \varepsilon K$, isto quer para a classe dado K quer para qualquer outra classe não-vazia e do mesmo tipo que K. Concluímos assim que a classe inicial é *uma classe estabilizada com respeito à subtracção* e que *o conjunto O é elemento estabilizador.* Note-se que as considerações precedentes permanecem válidas se impusermos a condição adicional $B \leqslant A$.

Em seguida vamos introduzir algumas classes estabilizadas que se revestem de especial importância em questões de medida e de probabilidade.

2. Semianéis

Comecemos pela *definição de semianel:*

A uma classe não-vazia K chama-se *semianel* se e só se ela for *fechada com respeito à intersecção binária* (quer dizer com dois conjuntos secantes) e, além disso, estiver satisfeita a chamada *condição de cadeia,* isto é as hipóteses $A \varepsilon K$, $B \varepsilon K$ e $A \leqslant B$ impuserem a existência dum número finito de conjuntos $A_m \varepsilon K$ ($m = 0,1, \dots, M$) tais que $A_0 = A$, $A_M = B$, $A_m \leqslant A_{m+1}$ para $m < M$ e $A_{m+1} - A_m \varepsilon K$, também para $m < M$.

Note-se que, seja qual for o semianel escolhido, é sempre possível tomar nele $A = B$, donde $A_m = A$ para todo o m e logo $A_{m+1} - A_m = O$ para $m < M$. Por outras palavras, *o conjunto O pertence obrigatoriamente a qualquer semianel.* Por outro lado, a parte da definição relativa aos conjuntos A e $B \geqslant A$ conduz às igualdades

$$B = \underset{0 \leqslant m \leqslant M}{V} A_m = A \dot{+} [\dot{\sum_{0 \leqslant m < M}} (A_{m+1} - A_m)],$$

isto atendendo à relação $B \geqslant A_m$ para cada m, à nota posta a seguir a 16), à convenção $A_M = B$, à propriedade monotónica da união, ao teorema 1, à fórmula 17'), à convenção $A_0 = A$ e à propriedade associativa da adição. Atendendo à fórmula 18), temos consequentemente a nova relação

$$B - A = \sum_{0 \leqslant m < M} (A_{m+1} - A_m), \tag{51}$$

a qual prova, tendo em conta a primeira parte da fórmula 11) (com A e B trocados) e a parte da nossa definição relativa à intersecção binária, que *qualquer diferença entre dois conjuntos dum semianel* (mesmo com diminuidor não contido no diminuendo) *pode ser igualada à soma dum número finito de diferenças pertencentes ao semianel, com a particularidade de cada parcela da soma ter um diminuidor e um diminuendo ambos pertencentes ao semianel e tais que o diminuendo contenha o diminuidor.* Todavia, mesmo que A e B pertençam ao semianel, *não há nada que obrigue* B − A *a pertencer a ele* sistematicamente.

Em suma, um semianel é uma classe estabilizada com respeito à intersecção binária com elemento estabilizador igual ao vazio, mas sujeita a certos condicionamentos relativos à subtracção e não necessariamente fechada com respeito à subtracção.

Exemplo 30. *Um exemplo importante dum semianel é a classe K formada por todos os intervalos contidos numa recta real dada* [eventualmente alargada]. — Com efeito, vimos no exemplo 16 que a intersecção de dois intervalos lineares é ainda um intervalo linear; logo só falta reconhecer que K cumpre com a condição de cadeia da definição de um semianel em relação a intervalos lineares A e $B \geqslant A$. — Ora, se designarmos por A'_0 o próprio A, por A'_1 a parte de B anterior a A e por A'_2 a parte de B posterior a A, então cada conjunto A'_l $(l = 0, 1, 2)$ será um intervalo linear (eventualmente degenerado) e cada soma

$$A_m = \dot{\sum_{0 \leqslant l \leqslant m}} A'_l (m = 0, 1, 2)$$

será também um intervalo linear e logo pertencerá a K. Por outro lado,

$$A_0 = A, \; A_2 = B, \; A_m \leqslant A_{m+1} \text{ para } m < 2$$

e

$$A_{m+1} - A_m = A'_{m+1} \varepsilon K \text{ para } m < 2.$$

Concluímos assim que a classe K é efectivamente um semianel.

Exercício 33. Aproveite o exemplo 30 para mostrar que existem semianéis que não são fechados nem com respeito à subtracção nem com respeito à união com duas parcelas.

Posto isso, a uma classe não-vazia chama-se *anel* se e só se ela for fechada simultaneamente com respeito à *subtracção* e com respeito à *união binária* (quer dizer com duas parcelas). Atendendo ao exemplo 29, podemos afirmar que *um anel é uma classe estabilizada com respeito à subtracção e com respeito à união binária, cabendo ao conjunto O o papel de elemento estabilizador.*

Seguem *outras propriedades dos anéis:*

52)

a) Um anel é fechado com respeito à adição binária, à intersecção binária e à subtracção simétrica;

b) um anel é fechado com respeito à união ou adição finita (quer dizer com um número finito de parcelas) e com respeito à intersecção finita e não-degenerada (quer dizer com um número de conjuntos secantes que seja finito e maior do que 1);

c) um anel é um semianel especial.

Justificação de 52). Em tudo quanto segue designamos por K o anel dado.

a) A propriedade relativa à adição binária é apenas um aspecto particular do facto de K ser uma classe fechada com respeito à união binária; a propriedade relativa à intersecção binária resulta da fórmula 10), quando aplicada a dois conjuntos pertencentes a K; a propriedade relativa à subtracção simétrica passa a ser uma consequência imediata da igualdade do exemplo 7.

b) A propriedade relativa à união ou adição reduz-se à relação $O \varepsilon K$ na ausência de parcelas, já está tratada no caso de haver uma ou duas parcelas e passa para o caso de mais do que duas parcelas por recurso à propriedade associativa da união ou adição. Por outro lado, a propriedade relativa à intersecção já está tratada no caso de haver dois conjuntos secantes e passa para o caso de haver mais do que dois conjuntos secantes por recurso à propriedade associativa da intersecção.

c) Atendendo à alínea *a*) e à definição de anel, sabemos que K é uma classe fechada com respeito à intersecção binária e à subtracção e logo só falta provar que K, sendo classe fechada com respeito à subtracção, satisfaz à condição de cadeia da definição de semianel em relação a conjuntos A e B $\geqslant$ A, ambos supostos pertencentes a K; isto sucede efectivamente se escolhermos $M = 1$ e se tomarmos em conta que $A_1 - A_0 = B - A \varepsilon K$.

Exemplo 31. Em face da definição de semianel e da parte final da justificação de 52 c), podíamos ser levados a pensar que é um anel todo o semianel fechado com respeito à subtracção, como quem diz toda a classe não-vazia fechada com respeito à subtracção e à intersecção binária. Que tal não é o caso, reconhece-se considerando um espaço Ω com mais do que k pontos e tomando aí a classe K formada por todos os conjuntos que tenham no máximo k pontos. *Esta classe é um semianel fechado com respeito à subtracção e, todavia, não é um anel* porque a isso se opõem as somas binárias de certos conjuntos pertencentes a K. Enfim, admitindo que a classe não-vazia K seja fechada com respeito à subtracção, a união e a intersecção (ambas binárias) não desempenham o habitual papel dual quando se pretende que K venha a ser um anel.

Exercício 34. Dada uma recta real X [ou alargada $\overline{X}$], viu-se, a propósito do exercício 33, que a classe formada por todos os intervalos contidos em X [ou $\overline{X}$] é um semianel sem ser anel. Por outro lado, pede-se para provar que é um anel a classe formada por todos os conjuntos contidos em X [ou $\overline{X}$] que sejam finitos (quer dizer que tenham um número finito de pontos).

Exercício 35. É possível dar uma definição de anel que acate o dualismo entre uniões e intersecções. Nestes termos, pede-se para provar que a classe K é um anel se e só se ela for uma classe que seja não-vazia e fechada com respeito à subtracção simétrica e que seja também fechada indiferentemente ou com respeito à união binária ou com respeito à intersecção binária.

Posto isso, a uma classe não-vazia K chama-se *anel-σ* (leia-se anel sigma) ou, por vezes, σ - anel se e só se ela for fechada simultaneamente com respeito à *subtracção* e com respeito à *união intransnumerável* (quer dizer com um número finito ou com uma infinidade numerável de parcelas). Como a união binária é um caso particular da união intransnumerável, concluímos não só que *todo o anel-σ é um anel especial,* como também que *todo o anel-σ é uma classe estabilizada com respeito à subtracção e à união intransnumerável, cabendo ao conjunto O o papel de elemento estabilizador.*

É óbvio que a classe K, suposta um anel-σ, tem forçosamente todas as propriedades dum anel e deve possuir certas propriedades adicionais, entre as quais citamos a de ser *fechada com respeito à adição intransnumerável,* isto em virtude de a adição ser um caso particular da união, e a de ser *fechada com respeito à intersecção não-degenerada e intransnumerável* (quer dizer com um número finito maior do que 1 ou uma infinidade numerável de conjuntos secantes), isto devido à fórmula 10), quando aplicada a conjuntos pertencentes a K que sejam em número finito maior do que 1 ou formem uma infinidade numerável.

Exemplo 32. Dado um espaço Ω, *é anel-σ a classe K formada por todos os conjuntos contidos em Ω que sejam intransnumeráveis* (quer dizer finitos ou numeráveis). Com efeito, é intransnumerável qualquer diferença entre dois conjuntos pertencentes a K e é intransnumerável qualquer união intransnumerável com parcelas pertencentes a K.

Exercício 36. Dado um espaço Ω que seja infinito (quer dizer com infinitos pontos), prove que é anel, sem ser anel-σ, a classe formada por todos os conjuntos contidos em Ω que sejam finitos.

Exercício 37. Faça a caracterização dos anéis, anéis-σ e semianéis através das indicatrizes dos conjuntos que lhes pertencem.

Posto isso, a uma classe não-vazia K chama-se *álgebra*, por vezes também *corpo*, se e só se ela for fechada simultaneamente com respeito à *complementação* e com respeito à *união binária*. Admitindo que K seja uma álgebra, existe um conjunto $A \varepsilon K$ e logo a definição de álgebra e a fórmula 8') implicam sucessivamente $A^- \varepsilon K$, $A \dotplus A^- = \Omega \varepsilon K$ e $\Omega^- = \Omega - \Omega = O \varepsilon K$. Portanto, *toda a álgebra é uma classe estabilizada com respeito à complementação e à união binária, cabendo aos conjuntos* O *e* Ω *o papel de elementos estabilizadores.*

Escolhidos arbitrariamente dois conjuntos $A \varepsilon K$ e $B \varepsilon K$, a fórmula 11) e a definição de álgebra implicam que $A - B = (A^- \vee B)^- \varepsilon K$, ficando assim respeitada a definição de anel. Este facto e o resultado 52) justificam as *propriedades duma álgebra:*

53)

a) Uma álgebra é fechada com respeito à adição binária, à intersecção binária, à subtracção (vulgar) e à subtracção simétrica;

b) uma álgebra é fechada com respeito à união ou adição finita e com respeito à intersecção finita (mesmo degenerada);

c) uma álgebra é um anel especial.

Exemplo 33. Há uma *definição alternativa ou dual para uma álgebra como classe não-vazia e fechada com respeito à complementação e à intersecção binária.* — Com efeito, aceite a primeira definição, a parte de 53a) relativa à intersecção completa as condições relativas à nova definição; por outro lado, aceite a nova definição, esta implica a anterior desde que se prove que uma classe não-vazia K, fechada com respeito à complementação e à intersecção binária, resulta necessariamente fechada com respeito à união binária — coisa esta que se conclui efectivamente por recurso à fórmula 9a), quando aplicada a conjuntos pertencentes a K.

Exemplo 34. Vale a seguinte asserção: «Um anel K é uma álgebra se e só se o espaço Ω pertencer a K.» — Com efeito, o estudo precedente mostra que a classe K, suposta uma álgebra, é um anel que abrange Ω; inversamente, se K for um anel tal que $\Omega \varepsilon K$, então K é uma classe não-vazia e fechada com respeito à união binária e assim só falta provar que K é também uma classe fechada com respeito à complementação; isto sucede realmente porque, escolhido arbitrariamente $B \varepsilon K$, a parte da definição de anel relativa à subtracção impõe a relação $\Omega - B = B^{-} \varepsilon K$.

Exercício 38. Dado um espaço Ω transnumerável (quer dizer nem finito nem numerável): mostre que a classe K formada por todos os conjuntos intransnumeráveis contidos em Ω é um anel (e até um anel-σ) sem ser uma álgebra; mostre também que a classe L formada pelos conjuntos da classe K e pelos seus complementos já se constitui em álgebra (recorrendo, para o efeito, às igualdades de Morgan).

Vamos introduzir, de permeio, as chamadas *classes monotónicas fechadas*, por vezes também denominadas monótonas fechadas.

A uma classe não-vazia chama-se *monotónica* [ou *ascendente* ou *descendente*] *fechada* se e só se ela for fechada com respeito à passagem ao limite ao longo de sucessões monotónicas [ou ascendentes ou descendentes].

A propósito desta definição, convém lembrar a 1.ª propriedade do n.º **5** do § 5, segundo a qual o limite citado existe sempre e é igual à união ou à intersecção dos termos da sucessão proposta (conforme esta for ascendente ou descendente). Em geral, uma classe monotónica [ou ascendente ou descendente] fechada não é uma classe estabilizada, mas sê-lo-á se ela for, por exemplo, uma álgebra monotónica [ou ascendente ou descendente] fechada.

Exercício 39. Dado o espaço Ω formado pelos números naturais, dê exemplos de pares de classes monotónicas [ou ascendentes ou descendentes] fechadas e não-elementares que sejam disjuntas entre si.

Posto isso, a uma classe não-vazia K chama-se *álgebra-σ* e também σ-álgebra, por vezes *corpo-σ* e também σ-corpo, se e só se ela for fechada simultaneamente com respeito à *complementação* e com respeito à *união intransnumerável.*

Como a união binária é um caso particular da união intransnumerável, concluímos não só que *toda a álgebra-σ é uma álgebra especial,* como também que *toda a álgebra-σ é uma classe estabilizada com respeito à complementação e à união intransnumerável, cabendo aos conjuntos O e Ω o papel de elementos estabilizadores.* Além disso, a parte da propriedade 53 a) relativa à subtracção e a parte da definição de álgebra-σ relativa à união mostram que *toda a álgebra-σ é um anel-σ especial.* Em suma, *uma álgebra-σ, além de abranger os conjuntos O e Ω, reúne todas as propriedade das álgebras e dos anéis-σ,* nomeadamente:

54)

a) Uma álgebra-σ é fechada com respeito à complementação, à subtracção (corrente) e à subtracção simétrica;

b) uma álgebra-σ é fechada com respeito à intersecção intransnumerável e à união ou adição intransnumerável.

Este repertório de propriedades pode resumir-se através do

Teorema 10: «Uma álgebra-σ é uma classe estabilizada com respeito a todas as operações internas intransnumeráveis por nós introduzidas, cabendo aos conjuntos *O* e Ω o papel de elementos estabilizadores.»

Exemplo 35. Há uma *definição alternativa ou dual para uma álgebra-σ como classe não-vazia e fechada com respeito à complementação e à intersecção intransnumerável.* — A justificação desta asserção obtém-se a partir da justificação homóloga do exemplo 33, pondo 54 b) em lugar de 53 a) e pondo intersecção ou união intransnumerável em lugar de intersecção ou união binária.

Exemplo 36. Vale a seguinte asserção: «Um anel-σ *K* é uma álgebra-σ se e só se o espaço Ω pertencer a *K*.» — A justificação desta asserção obtém-se a partir da sua homóloga do exemplo 34, pondo álgebra-σ e anel-σ em lugar de álgebra e anel e pondo união intransnumerável em lugar de união binária.

Exemplo 37. Vale a seguinte asserção: «Uma álgebra K é uma álgebra-σ se e só se K for uma álgebra ascendente [ou descendente] fechada.» — Com efeito, se K for uma álgebra-σ e logo uma álgebra, está terá de ser ascendente [ou descendente] fechada, porque a isso a obrigam a natureza do limite duma sucessão ascendente [ou descendente] e a propriedade 54 b) no caso da numerabilidade. Inversamente, verificada a primeira [ou a segunda] versão da condição do enunciado: escolham-se arbitrariamente conjuntos $A_n \varepsilon K$ $(n = 1, 2, \ldots, ad\ infinitum)$; ponha-se

$$B_N = \bigvee_{1 \leqslant n \leqslant N} A_n \ [\text{ou} \bigwedge_{1 \leqslant n \leqslant N} A_n]$$

para todo o N natural; atenda-se a que 53 b) assegura $B_N \varepsilon K$ para cada N e que a propriedade monotónica da união [ou intersecção] assegura

$$B_N \leqslant B_{N+1} \ [\text{ou} \geqslant B_{N+1}]$$

para cada N; tome-se em conta que as propriedades comutativa, associativa e absorvente da união [ou intersecção] dão

$$\bigvee_{1 \leqslant N < +\infty} B_N = \bigvee_{1 \leqslant n < +\infty} A_n \ [\text{ou} \bigwedge_{1 \leqslant N < +\infty} B_N = \bigwedge_{1 \leqslant n < +\infty} A_n];$$

recorra-se à definição de classe ascendente [ou descendente] fechada; infira-se que K é uma classe não-vazia e fechada com respeito à complementação e à união [ou intersecção] intransnumerável; termine-se a dedução invocando a definição original [ou dual] para uma álgebra-σ.

Exemplo 38. Vale a seguinte asserção: «Toda a álgebra finita é uma álgebra-σ.» — Com efeito, se a álgebra K tiver apenas um número finito de conjuntos, toda a união numerável com parcelas pertencentes a K mete parcelas repetidas, cuja supressão (correcta em face da propriedade absorvente da união) conduz a uma união finita, a qual, atendendo a 53 b), terá de pertencer a K. Logo K satisfaz à definição de álgebra-σ.

Exemplo 39. Seja qual for o espaço Ω, reconhece-se imediatamente que a classe finita $K = \{O,\Omega\}$ é uma álgebra e logo é uma álgebra-σ, à qual podemos chamar *álgebra-σ mínima* (mínima porque os elementos estabilizadores O e Ω não podem faltar). — Por outro lado, a classe $L = 2^\Omega$ é fechada com respeito a operações internas arbitrárias; logo é uma álgebra-σ, à qual podemos chamar *álgebra-σ máxima* (máxima porque não existe sobreclasse própria para a classe formada por todos os conjuntos contidos em Ω). — Claro que, em geral, haverá *álgebras-σ intermédias* entre as álgebras-σ mínima e máxima.

Exemplo 40. Dada a recta real $X(x)$ [eventualmente alargada $\overline{X}(x)$], considere-se a classe K formada pelas somas (possivelmente degeneradas) que podem obter-se adicionando um número finito de intervalos da forma $\{-\infty < x < b\}$ ou, se $a > -\infty$, da forma $\{a \leqslant x < b\}$ [eventualmente da forma $\{a \leqslant x \leqslant +\infty\}$ ou, se $b < +\infty$, da forma $\{a \leqslant x < b\}$], qualquer um deles possivelmente degenerado. O exame de todas as formas de intervalos lineares capazes de intervir na qualidade de parcelas mostra que *qualquer intersecção de duas parcelas é, por sua vez, um intervalo do género aqui considerado.* — Ora, escolhidos arbitrariamente intervalos J_n $(n = 1,2, \dots , N < +\infty)$ do género referido, *disjuntos dois a dois* e com extremos a_n e $b_n \geqslant a_n$, podemos ordená-los por forma que os números a_n cresçam com n resultando, caso se tenha $N > 1$, a relação $b_n \leqslant a_{n+1}$ para $n = 1, 2, \dots , N-1$. Então, as partes de X [eventualmente $\overline{X}$] anterior a J_1, posterior a J_N e, caso se tenha $N > 1$, intermédia entre J_n e J_{n+1} para $n = 1, 2,\dots , N-1$ são partes que se constituem em intervalos K_n $(n = 1, 2, \dots , N+1)$, estes todos do género aqui considerado, disjuntos dois a dois e tais que

$$X \text{ [eventualmente } \overline{X}] = \Big(\dot{\sum_{1\leqslant n\leqslant N}} J_n\Big) \dot{+} \Big(\dot{\sum_{1\leqslant n\leqslant N+1}} K_n\Big);$$

donde, atendendo à fórmula 18), a relação

$$\dot{\sum_{1\leqslant n\leqslant N+1}} K_n = \Big(\dot{\sum_{1\leqslant n\leqslant N}} J_n\Big)^-,$$

a qual prova que a classe K, certamente não-vazia, é fechada com respeito à complementação. Por outro lado, escolhidas arbitrariamente a soma

$$\dot{\sum_{1 \leqslant n \leqslant N}} J_n$$

e outra soma do mesmo género, digamos

$$\dot{\sum_{1 \leqslant n' \leqslant N'}} J'_{n'} \ ,$$

a fórmula 13') dá a relação

$$\Big(\dot{\sum_{1 \leqslant n \leqslant N}} J_n\Big) \wedge \Big(\dot{\sum_{1 \leqslant n' \leqslant N'}} J'_{n'}\Big) = \dot{\sum_{1 \leqslant n \leqslant N,\, 1 \leqslant n' \leqslant N'}} (J_n \wedge J'_{n'}),$$

a qual prova que a classe K é fechada com respeito à intersecção binária. Daí e do exemplo 33 concluímos que K é uma *algebra.* Todavia, *K não pode ser nenhuma álgebra-σ* porque, se escolhermos as somas degeneradas $J_p = \{0 \leqslant x < 1/p\}$ $(p = 1, 2, 3, \dots)$, então $\bigwedge_{1 \leqslant p < +\infty} J_p = \{0\} \varepsilon K^-$, pelo que a propriedade 54b) obsta a que K seja uma álgebra-σ.

Exercício 40. Faça a caracterização das diversas álgebras e das diversas classes monotónicas fechadas através das indicatrizes dos conjuntos que lhes pertencem.

5. Espaços mensuráveis

Entre as classes definidas num espaço dado $\Omega(\omega)$ distinguem-se, por ordem crescente da sua importância, as classes estabilizadas com respeito a certas operações internas, entre estas os diversos géneros de anéis e de álgebras e, após nova selecção, as chamadas álgebras-σ, as quais podemos assinalar preferindo a letra A à letra K usada no caso geral.

Nesta conformidade, sendo A o conjunto genérico de A, podemos constituir o par ordenado $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ ou abreviadamente (Ω,A), a que vamos chamar *espaço mensurável*, por vezes também *espaço medível*, atribuindo-se então ao conjunto genérico $\mathrm{A}\epsilon A$ a designação de *conjunto mensurável*, por vezes também *conjunto medível*. Em qualquer dos casos, a classificação de mensurável ou medível foi adoptada tendo em vista que, mais adiante, o ente afectado vai ficar com uma *medida* ou seja com uma grandeza cuja definição adequada vai aparecer na continuação do nosso estudo. Para já, a terminologia introduzida permite refrasear o teorema 10 sob a forma do

Corolário 10'. «Escolhido arbitrariamente um espaço mensurável (Ω,A), resultam mensuráveis o conjunto vazio, o próprio espaço Ω e quaisquer conjuntos que possam obter-se a partir de conjuntos mensuráveis por meio das operações internas intransnumeráveis por nós introduzidas.»

Em suma, um *excelente grau de conservação para os conjuntos mensuráveis.*

Exemplo 41. Seja qual for o espaço não-elementar Ω, o par ordenado (Ω,A) será um espaço mensurável sempre que $A =$ $= \{ O, \Omega, \mathrm{A}, \mathrm{A}^- \}$, com A a representar um conjunto arbitrário, contanto que não-vazio e distinto de Ω. Com efeito, como a classe A é não-vazia e fechada com respeito à complementação e à união binária, ela fica instituída em álgebra finita e logo em álgebra-σ (veja-se o exemplo 38).

Exercício 41. Dada a recta real X [ou alargada $\overline{\mathrm{X}}$], prove que (X,A) [ou $(\overline{\mathrm{X}},A)$] é um espaço mensurável, desde que se defina A como sendo a classe formada por todos os conjuntos intransnumeráveis e pelos seus complementos (recorrendo, para o efeito, às igualdades de Morgan). Haverá intervalos pertencentes a A?

§ 12 — ÁLGEBRAS-σ COMPLETIVAS, GERAÇÃO DE ÁLGEBRAS-σ E GENERALIZAÇÕES

1. Generalidades

Dado o espaço $\Omega(\omega)$, considere primeiro uma classe K estabilizada com respeito a certas operações internas e, em seguida, outra classe L do mesmo tipo que K. Então, a existência de elementos estabilizadores pertencentes simultaneamente a todas as classes do mesmo tipo que K ou L impede que se formem à custa de K e L quaisquer complementos, diferenças (vulgares), diferenças simétricas ou somas que sejam ainda classes do mesmo tipo que K ou L. Por outro lado, tirando o caso em que uma das classes é subclasse da outra ou seja o caso em que a união se reduz a uma das parcelas, também não são boas as perspectivas para $K \vee L$ vir a ser uma classe do mesmo tipo que K e L, porque se afigura difícil que $K \vee L$ se mantenha fechada com respeito às operações internas incidentes, as quais agora podem envolver conjuntos provenientes em parte de K e em parte de L; isto se exceptuarmos a complementação que é uma operação *unária* (quer dizer opera sobre um só conjunto).

Exemplo 42. Retomemos o exemplo 41 e suponhamos aí que o espaço Ω tem mais do que 2 pontos. Se mudarmos o conjunto $A \neq O, \Omega$ para outro $A' \neq O, \Omega, A, A^-$, concluímos que $A'^- \neq O, \Omega$, A, A^- e ficamos assim com duas álgebras-σ diferentes, uma $\{ O, \Omega,$

$A, A^-\} = \mathcal{A}$ e outra $\{O, \Omega, A', A'^-\} = \mathcal{A}'$. Então, $\mathcal{A}\, ^V \mathcal{A}' = \{O, \Omega, A, A^-, A', A'^-\}$ compõe-se de 6 conjuntos (todos distintos entre si). Pode ficar para exercício a prova, por via directa, de que $\mathcal{A}\, ^V \mathcal{A}'$ não pode ser nenhuma álgebra-σ (prova esta que afinal não vale a pena fazer aqui porque veremos, mais adiante e em termos mais gerais, que é impossível a existência duma álgebra-σ com um número de conjuntos que seja finito e diferente duma potência perfeita de 2).

Exercício 42. Comprove a incompatibilidade alegada no exemplo 42 na hipótese específica

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \ A = \{1\} \ \text{ e } \ A' = \{1, 2\}.$$

2. Estudo dum tipo de completação

Escolhida arbitrariamente uma classe não-vazia $\mathcal{L}(L)$ ou seja uma classe $\mathcal{L}$ de conjunto genérico $L \leqslant \Omega$, vamos chamar *classe completiva de* $\mathcal{L}$ *e vamos representar por* $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{L})$ a classe $\tilde{\mathcal{L}}$ formada por todos os conjuntos $\tilde{L} \leqslant \Omega$ que estejam contidos nalgum conjunto $L \varepsilon \mathcal{L}$. Como qualquer L é subconjunto (impróprio) de si mesmo, vê-se imediatamente que vale sempre $\mathcal{L} \leqslant \tilde{\mathcal{L}}$ e que $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$ se e só se $\mathcal{L}$ for uma classe *hereditária*, quer dizer uma classe não-vazia tal que todo o subconjunto dum conjunto $L \varepsilon \mathcal{L}$ herde de L a propriedade de pertencer a $\mathcal{L}$. Nestes termos, $\Omega \varepsilon \mathcal{L}$ implica $\tilde{\mathcal{L}} = 2^\Omega$.

Supondo que $\mathcal{A}(A)$ e $\mathcal{L}(L)$ são duas álgebras-σ, vimos no n.º 1 que $\mathcal{A}\, ^V \mathcal{L}$ *é* forçosamente uma álgebra-σ se $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{L}$, mas em geral não é uma álgebra-σ nos demais casos. Por outro lado, se apenas $\mathcal{A}$ continuar a ser obrigatoriamente uma álgebra-σ, a hipótese $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{A}$ não assegura que se tenha $\tilde{\mathcal{L}} \leqslant \mathcal{A}$ nem assegura que $\tilde{\mathcal{L}}$ venha a ser uma álgebra-σ. Mas, caso a classe $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{A}$ satisfaça às condições da primeira definição duma álgebra-σ, com possível excepção da condição de ser fechada com respeito à complementação, então podemos alcançar um resultado bastante útil se substituirmos a união de classes $A \vee \tilde{L}$, de comportamento incerto, pela classe M cujo conjunto genérico M é a união genérica $A \vee \tilde{L}$. Nestes termos, vamos enunciar o

Teorema 11. «Escolhidas arbitrariamente uma álgebra-σ A e uma classe $L \leqslant A$ que seja não-vazia e que seja fechada com respeito a uniões intransnumeráveis, então constitui-se em álgebra-σ a classe M cujo conjunto genérico é a união do conjunto genérico de A com o conjunto genérico da classe $\tilde{L}$ completiva de L. Além disso, tem-se sempre a relação $A \leqslant M$ e tem-se a igualdade $A = M$ se e só se $\tilde{L} \leqslant A$ (condição esta satisfeita, em particular, se a classe L for hereditária).»

Demonstração. Antes de mais nada, existem conjuntos $A \varepsilon A$, $L \varepsilon L$ e $\tilde{L} \varepsilon \tilde{L}$, de modo que resulta não-vazia a classe M formada pelas uniões $A \vee \tilde{L} = M$.

Em seguida, escolhidos arbitrariamente conjuntos $M_n = A_n \vee \tilde{L}_n \varepsilon M$ $(n=1,2,3,\dots)$ tais que, seja qual for n, se tenha $A_n \varepsilon A$ e $\tilde{L}_n \varepsilon \tilde{L}$ donde $\tilde{L}_n \leqslant L_n \varepsilon L$, então as propriedades da união dão

$$\bigvee_n M_n = (\bigvee_n A_n) \vee (\bigvee_n \tilde{L}_n),$$

com $\bigvee_n A_n \varepsilon A$ e com $\bigvee_n \tilde{L}_n \leqslant \bigvee_n L_n \varepsilon L$, donde concluímos primeiro que $\bigvee_n \tilde{L}_n \varepsilon \tilde{L}$ e depois que $\bigvee_n M_n \varepsilon M$. Assim M resulta uma classe fechada com respeito à união intransnumerável.

Por outro lado, seja qual for o conjunto $M = A \vee \tilde{L}$, existe um $L \varepsilon L$ tal que $\tilde{L} \leqslant L$ ou, equivalentemente, $\tilde{L}^- \geqslant L^-$; logo as fórmulas 9a), 8') e 13') e as propriedades da intersecção dão

$$M^- = (A^- \wedge \tilde{L}^-) \wedge (L^- \dotplus L) = (A^- \wedge L^-) \dotplus [(A^- \wedge \tilde{L}^-) \wedge L]$$

onde o teorema 10 assegura $A^- \wedge L^- \varepsilon A$ e onde a propriedade monotónica da intersecção assegura $L \geqslant (A^- \wedge \tilde{L}^-) \wedge L \varepsilon \tilde{L}$. Assim M

resulta uma classe fechada com respeito à complementação e logo resulta uma álgebra-σ.

Posto isso, como $O \varepsilon \tilde{L}$, podemos escolher $\tilde{\mathrm{L}} = O$ donde, seja qual for $\mathrm{A} \varepsilon A$, a relação $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{V} O \varepsilon M$ da qual depreendemos $A \leqslant M$.

Por fim: ou $\tilde{L}$ não está contida em A, existe um $\tilde{\mathrm{L}} \varepsilon A^{-}$ ao qual corresponde $\mathrm{M} = O^{V} \tilde{\mathrm{L}} = \tilde{\mathrm{L}} \varepsilon A^{-}$ e resulta $A \neq M$; ou $\tilde{L} \leqslant A$, tem-se $\mathrm{M} = \mathrm{A}^{V} \tilde{\mathrm{L}} \varepsilon A$ para qualquer A e para qualquer $\tilde{\mathrm{L}}$ e resulta a relação $M \leqslant A$, a qual, juntamente com $A \leqslant M$, prova que vale a igualdade $A = M$, c. q. d.

Como a fórmula 17') dá $M = A + (M - A)$, reconhecemos que a álgebra-σ M é afinal a soma da álgebra-σ A com a classe $M - A$, esta impossibilitada de ser uma álgebra-σ e formada à custa de A por intermédio de $L \leqslant A$. Vamos chamar *completação de A com respeito a L* à transfomação de A em M (por intermédio de $L \leqslant A$) e vamos chamar a M *álgebra-σ completiva de A com respeito a L*; por outro lado, vamos considerar a álgebra-σ original *ou completa ou incompleta com respeito a L* conforme tivermos ou $A = M$ ou $A \neq M$.

Se quisermos, podemos reformular as definições aqui dadas em termos de espaços mensuráveis, chamando *completação do espaço mensurável original* (Ω, A) *com respeito a L* à transformação de (Ω, A) no novo espaço mensurável (Ω, M), chamando a (Ω, M) *espaço mensurável completivo de* (Ω, A) *com respeito a L* e considerando o espaço mensurável (Ω, A) *ou completo ou incompleto com respeito a L* conforme tivermos ou $A = M$ ou $A \neq M$.

Exercício 43. Dado o espaço $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ponha $\mathrm{A} = \{1,2\}$, considere a álgebra-σ $A = \{O, \Omega, \mathrm{A}, \mathrm{A}^{-}\}$ e complete-a com respeito à classe L *formada:*

a) pelo único conjunto A;

b) pelos dois conjuntos O e A^{-};

c) pelos três conjuntos $\mathrm{A}, \mathrm{A}^{-}$ e Ω.

3. **Geração de certas classes**

O estudo precedente revelou que em geral as classes estabilizadas com respeito a certas operações internas relativas a Ω deixam de ter tipo fechado com respeito às principais operações internas relativas a 2^{Ω}, pelo menos enquanto deixarmos de lado a intersecção de classes. Mas, se metermos a dita intersecção, veremos que as coisas passam a correr excepcionalmente bem.

Com efeito, temos o

Teorema 12. «Escolhida arbitrariamente uma classe estabilizada com respeito a certas operações internas, então a intersecção K de quaisquer classes do mesmo tipo da escolhida é ainda uma classe desse tipo, com a particularidade de pertencer a K todo o elemento estabilizador da classe escolhida.»

Demonstração. Considerem-se quaisquer classes K_t do mesmo tipo que a classe escolhida, com t a percorrer uma família T (com o mínimo de um índice e eventualmente transnumerável). Como os elementos estabilizadores da classe escolhida pertencem a cada uma das classes K_t, resulta que eles pertencem também a $\bigwedge_{t \in T} K_t = K$; assim só falta provar que K é uma classe fechada com respeito às operações internas incidentes.

Ora, caso se sujeitem certos conjuntos $\mathrm{K} \varepsilon K$ a operações internas incidentes, então cada um dos conjuntos K seleccionados resulta, seja qual for t, um conjunto $\mathrm{K}_t \varepsilon K_t$ e, portanto, o resultado das operações seleccionadas pertence a cada uma das classes K_t e logo pertence a K, c. q. d.

Uma consequência imediata do teorema 12 é o

Corolário 12'. «Escolhido arbitrariamente um espaço, a intersecção ou de *quaisquer* anéis [ou anéis-σ] ou de *quaisquer* álgebras [ou álgebras-σ] é respectivamente ou um anel [ou anel-σ] ou uma álgebra [ou álgebra-σ].»

Exercício 44. Indague o que se passa com a tese análoga à do corolário 12', que se obtém substituindo formalmente as classes secantes do enunciado por:

a) semianéis;

b) classes hereditárias;

c) classes monotónicas [ou ascendentes ou descendentes] fechadas.

Posto isso, dado o espaço Ω, seja G uma classe *arbitrária* (*à qual se permite que seja vazia*). Claro que a classe máxima 2^Ω contém G e é uma classe fechada com respeito a quaisquer operações internas relativas a Ω. Então, escolhida uma classe L estabilizada com respeito a certas operações internas, 2^Ω será uma classe estabilizada do mesmo tipo que L a qual, além de conter G, pode ser uma das classes secantes referidas no enunciado do teorema 12. Consequentemente, se considerarmos as diversas classes G_t que sejam do tipo de L e que contenham a classe G, então o índice t percorre uma família de índices T com um ou mais elementos; a correspondente intersecção

$$G^\circ = \bigwedge_{t \in T} G_t \tag{55}$$

é ainda uma classe estabilizada do mesmo tipo que L a qual, atendendo à nota à fórmula 16), se sujeita à relação $G^\circ \geqslant G$.

Nesta conformidade, vamos chamar a G° *classe do tipo de L e gerada por G*, vamos chamar a G *classe geradora da classe G° do tipo de L* e vamos chamar à transformação de G em G° *geração de G° do tipo de L a partir de G*. Sempre que o tipo de L for o de álgebra-σ [ou álgebra, anel-σ, anel], podemos simplificar a terminologia chamando a G° *álgebra-σ* [ou álgebra, anel-σ, anel] *gerada* [ou gerado] *por G*.

Ora, toda a classe K contendo G e também do mesmo tipo que L coincide com uma das classes secantes G_t de 55) e, consequentemente, sujeita-se à relação $G^\circ \leqslant K$; por outras palavras, G° é subclasse de toda a classe K do género referido. Como a própria classe G° é do género assinalado, afigura-se natural que vamos chamar a G^o também *classe mínima do tipo de L e construída sobre G,* eventualmente *álgebra-σ* [ou álgebra, anel-σ, anel] *mínima* [ou mínimo] *construída* [ou construído] *sobre G.*

Seguem as *principais propriedades da operação de geração* aqui definida, isto *debaixo da hipótese de se encontrar fixado o tipo de L* ou seja da hipótese de estabilização com respeito a certas operações internas:

56)

a) Seja qual for G, tem-se $G \leqslant G^o$ e G^o resulta do mesmo tipo que L;

b) $G = G^o$ se e só se G for do mesmo tipo que L;

c) seja qual for a classe $H \geqslant G$, tem-se $H^o \geqslant G^o$;

d) a relação $G \leqslant H \leqslant G^o$ implica $G^o = H^o$. †

Justificação de 56). *a*) Trata-se duma reafirmação de conclusões anteriores.

b) Se o tipo de G não for o de L, então a parte final de *a*) impede a coincidência entre G e G^o. Por outro lado, se G tiver o tipo de L, então G coincide com uma das classes secantes G_t de 55), donde $G^o \leqslant G$, e logo, atendendo à parte inicial de *a*), a igualdade $G = G^o$.

c) Pondo $H^o = \bigwedge_{u \in U} H_u$, no estilo de 55) e com significados óbvios para os símbolos usados, a hipótese feita implica, seja qual for $u \in U$, a relação $H_u \geqslant H \geqslant G$, de modo que H_u coincide com uma das classes G_t. Daí e das propriedades da intersecção concluímos que $G^o \leqslant H^o$.

d) A hipótese estabelecida e a alínea *c*) dão $G^o \leqslant H^o \leqslant (G^o)^o$ e, em seguida, as alíneas *a*) e *b*) dão $(G^o)^o = G^o$. Portanto, $G^o \leqslant$ $\leqslant H^o \leqslant G^o$ e a tese segue.

---

† *O uso mais frequente de* 56) *corresponde ao caso em que* G^o *é a álgebra-σ gerada por G.*

Exemplo 43. Escolhida arbitrariamente uma álgebra-σ A do género referido no exemplo 41, podemos conseguir a relação $A = G^o$, com G^o igual à álgebra-σ gerada por G, se escolhermos para G uma das classes elementares ou $\{A\}$ ou $\{A^-\}$. Para já, a igualdade $A = (A^-)^-$ mostra que as duas opções indicadas apenas se distinguem formalmente, de modo que não perdemos em generalidade se escolhermos $G = \{A\}$. Em seguida, G^o contém G e não pode deixar de fora nem A nem o complemento A^- nem algum dos elementos estabilizadores O e Ω. Logo $G^o \geqslant A \geqslant G$ e a tese segue de 56d) e b).

Exemplo 44. Vale o seguinte *critério:* «Escolhida arbitrariamente uma classe *não-vazia* G, a intersecção J de todas as sobreclasses de G que sejam ascendentes [ou descendentes ou monotónicas] fechadas é uma intersecção que coincide com a álgebra-σ gerada por G se e só se J for uma álgebra.» — Com efeito, sendo G^o a álgebra-σ gerada por G, logo dada pela fórmula 55), sabemos que cada classe secante G_t é, atendendo ao exemplo 37, uma classe secante de J especialmente seleccionada. Portanto, a propriedade monotónica da intersecção dá $J \leqslant G^o$. — Por outro lado, como todos os conjuntos pertencentes a G são elementos estabilizadores para as diversas classes secantes de $J \geqslant G$, o resultado 56a) torna a classe J, gerada pela intersecção referida no enunciado, em classe ascendente [ou descendente ou monotónica] fechada, podendo servir como referência L qualquer sobreclasse de G que seja ascendente [ou descendente ou monotónica] fechada, por exemplo $L = 2^\Omega$. — Posto isso, ou a classe J não é álgebra e a igualdade entre J e a álgebra G^o torna-se impossível ou então a classe J é uma álgebra e a asserção do exemplo 37 obriga J a ser uma álgebra-σ, caso este em que a relação já deduzida $G \leqslant J \leqslant G^o$ e os resultados 56d) e b) conduzem a $G^o = J^o = J$, c. q. d.

Exercício 45. Dados o espaço $\Omega = \{1,2,3,4\}$ e a classe G composta pelos dois conjuntos $\{2\}$ e $\{1,3\}$, forme todos os géneros de anel e de álgebra que possam ser gerados pela classe G.

§ 13 — DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DUM ESPAÇO MENSURÁVEL

1. Generalidades

Escolhido arbitrariamente um espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ ou abreviadamente (Ω, A), é o nosso objectivo *aprofundar o estudo da estruturação interna da álgebra-σ A* formada por todos os conjuntos mensuráveis A. Por vezes, as nossas considerações valerão também para o caso de *A* ser uma álgebra sem ser uma álgebra-σ; todavia deixaremos ao cuidado do leitor a discriminação de tais situações.

Posto isso, vamos chamar *decomposição aditiva* ou mais simplesmente *decomposição,* em qualquer dos casos do espaço mensurável dado ou da correspondente álgebra-σ, a toda a classe *intransnumerável* $D = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots\}$ ou ainda a toda a formação duma tal classe *D,* isto debaixo da convenção de que os símbolos $\mathrm{A}_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *designem conjuntos não-vazios, mensuráveis, disjuntos dois a dois e tais que o espaço* Ω, ele próprio mensurável em virtude do corolário 10′, *satisfaça à igualdade* $\Omega = \dot{\sum_n} \mathrm{A}_n$.

Uma tal decomposição diz-se *finita* ou *infinita* consoante os conjuntos A_n forem em número finito ou infinito; diz-se *redutível* ou *irredutível* consoante existir ou deixar de existir algum A_n com subconjunto próprio, não-vazio e mensurável. Neste contexto podemos classificar um conjunto não-vazio e mensurável como *átomo* de (Ω, A) ou de *A* se e só se ele for desprovido de subconjuntos próprios, não-vazios e mensuráveis. Assim um conjunto elementar será um átomo se e só se ele for mensurável; por outro lado, não só uma decomposição será irredutível se e só se *todos os seus conjuntos forem átomos,* como também *dois átomos* A_1 *e* $A_2 \neq A_1$ *não podem deixar de ser disjuntos,* isto porque a intersecção mensurável $A_1 \wedge A_2$ não pode deixar de ser vazia.

Dada a decomposição $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$: vamos chamar *classe das somas extraídas de* D *e vamos representar por* $S(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ *ou por* $S(D)$ *ou ainda por* S *a classe formada por todas as somas parciais que possam obter-se a partir de* $\dot{\sum\limits_n} A_n$ (incluindo a soma vazia, igual a O e logo mensurável devido ao corolário 10'); em seguida vamos chamar *classe das somas associadas a* D *e vamos representar por* $Z(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ *ou por* $Z(D)$ *ou ainda por* Z *a classe formada por todas as somas* $\dot{\sum\limits_n} A'_n$ *onde,* seja qual for n, o *símbolo* A'_n *representa um subconjunto de* A_n *arbitrário contanto que mensurável* (possivelmente vazio); por fim, vamos chamar *soma das classes associadas a* D *e vamos representar por* $C(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ *ou por* $C(D)$ *ou ainda por* C *a soma das classes* $\dot{\sum\limits_n} \mathcal{A}_n$ *onde,* seja qual for n, *o símbolo* $\mathcal{A}_n$ *representa a classe formada por todos os subconjuntos de* A_n *que sejam não-vazios e mensuráveis* (incluindo o próprio A_n). Talvez convenha acrescentar que, por um lado, o simbolismo $\dot{\sum\limits_n} \mathcal{A}_n$ se justifica porque as classes $\mathcal{A}_n$ são disjuntas duas a duas (em virtude da sua definição) e que, por outro lado, a designação atribuída a C se pode pormenorizar chamando a cada $\mathcal{A}_n$ *classe associada ao conjunto* A_n *com o mesmo índice.*

2. **Primeiros teoremas relativos a decomposições**

Seguem alguns teoremas que envolvem as definições aqui aduzidas.

Teorema 13. «Escolhida arbitrariamente uma decomposição D do espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$, verificam-se as igualdades $\mathcal{A} = Z$ e $\mathcal{A} = C^o$, com C^o a representar a álgebra-σ gerada por C.»

Demonstração. Seja $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ a decomposição escolhida. Atendendo ao corolário 10', qualquer soma $\dot{\sum\limits_n} A'_n \varepsilon Z$ é mensurável e logo resulta $Z \leqslant A$. Por outro lado, seja qual for $A \varepsilon A$, a definição de D e as propriedades da intersecção e da adição dão $A = A \wedge (\dot{\Sigma}_n A_n) = \dot{\Sigma}_n (A \wedge A_n)$, onde cada intersecção $A \wedge A_n$ é um conjunto A'_n, isto em virtude do corolário 10'. Logo $A \leqslant Z$ e obtemos assim a primeira parte da tese.

Passando para a outra parte, as definições dadas mostram que todo o $C \varepsilon C$ é uma soma degenerada $\dot{\Sigma}_n A'_n$ com uma só parcela, de modo que resulta $C \leqslant Z$. Em seguida, o resultado 56a) e o corolário 10' mostram que toda a soma $\dot{\Sigma}_n A'_n \varepsilon Z$ terá de petrencer a C^o, de modo que obtemos a relação $Z \leqslant C^o$. Nestas condições $C \leqslant Z \leqslant C^o$; portanto, os resultados 56d) e b) e a primeira parte da tese dão $C^o = Z^o = Z = A$, c. q. d.

O teorema precedente relaciona o comportamento de A com os de Z e de C. O teorema seguinte vai relacionar o comportamento de A com o da classe S e é um teorema bastante importante para o seguimento desta exposição.

Teorema 14. «Escolhida arbitrariamente uma decomposição D do espaço mensurável (Ω, A), verifica-se a igualdade $S = D^o$, com D^o a representar a álgebra-σ gerada por D. Além disso, tem-se sempre a relação $S \leqslant A$ e tem-se a igualdade $S = A$ se e só se D for uma decomposição irredutível.»

Demonstração. Seja $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ a decomposição escolhida. Claro que pertencem a S a soma vazia e a soma $\dot{\Sigma}_n A_n = \Omega$, complementares uma da outra. Por outro lado, $\Omega \neq \dot{\Sigma}_p A_{n_p} \varepsilon S$ $(1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots)$ conduz, atendendo à definição da complementação e à fórmula 18), a

$$(\dot{\Sigma}_p A_{n_p})^- = (\dot{\Sigma}_n A_n) - (\dot{\Sigma}_p A_{n_p}) = \dot{\Sigma}_{n \neq n_p} A_n \varepsilon S,$$

de modo que podemos afirmar que S é uma classe não-vazia e fechada com respeito à complementação.

Em seguida, escolhidos quaisquer conjuntos não-vazios $S_n \varepsilon S$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, ter-se-á, seja qual for n, uma igualdade da forma $S_n = \dot{\Sigma}_{p_n} A_{n,p_n}$, com cada $A_{n,p_n} \varepsilon D$, donde, atendendo às propriedades da união e da adição, $\underset{n}{V} S_n = \underset{n,p_n}{V} A_{n,p_n}$, união esta da qual podemos suprimir as parcelas repetidas que houver para ficarmos apenas com parcelas todas pertencentes a D e distintas umas das outras, quer dizer para ficarmos com uma soma pertencente a S. Em face do exposto, concluímos que a classe S é também fechada com respeito à união intransnumerável; *logo é uma álgebra-σ*. Mas os conjuntos $A_n \varepsilon D$ são somas degeneradas (com uma só parcela) que pertencem a S; assim o resultado 56a) e o corolário 10' obrigam qualquer conjunto $S \varepsilon S$ a pertencer a D^o, donde concluímos primeiro que $D \leqslant S \leqslant D^o$ e depois, atendendo a 56d) e b), que $D^o = S^o = S$.

Passemos para a segunda parte da tese. Como o conjunto genérico $S \varepsilon S$ é obtido por adição intransnumerável de conjuntos mensuráveis pertencentes a A, o corolário 10' impõe $S \varepsilon A$ e logo $S \leqslant A$. No caso particular $S = A$, as propriedades da adição mostram que todo o $A \varepsilon A$ e não-vazio é sobreconjunto de certos conjuntos A_n, além de ser disjunto dos restantes A_n (se os houver); logo um tal A não pode ser subconjunto próprio de nenhum conjunto A_n. Concluímos que cada A_n é um átomo; logo D é uma decomposição irredutível. Inversamente, se D for irredutível, qualquer $A \varepsilon A$ dá $A = A \wedge (\dot{\sum_n} A_n) = \dot{\sum_n} (A \wedge A_n)$, com cada $A \wedge A_n \leqslant A_n$ mensurável e logo ou igual a O ou igual a A_n, donde concluímos que $A \varepsilon S$ ou seja $A \leqslant S$, o que prova, juntamente com a relação já deduzida $S \leqslant A$, que se verifica a igualdade $A = S$. Fica assim terminada a nossa demonstração.

Acrescentemos que o recurso à classe C permite modificar a parte final da nossa demonstração como segue: caso D seja irredutível, tem-se $D = C$, de modo que a segunda parte do teorema 13 e a primeira parte do teorema 14 dão $A = C^o = D^o = S$.

3. Estudo específico das decomposições irredutíveis

Em face do teorema 14 reconhecemos que a irredutibilidade de D faz coincidir A com a classe S das somas extraídas de D e, por isso, dá acesso relativamente cómodo a todos os conjuntos mensuráveis pertencentes a A, através de meras adições efectuadas sobre conjuntos pertencentes a D. Assinalada assim a importância das decomposições irredutíveis, vamos procurar levar mais longe o seu estudo. Para começar, temos o

Teorema 15 ou teorema da unicidade. «Escolhido arbitrariamente um espaço mensurável, não pode haver duas decomposições irredutíveis distintas.»

Demonstração. Seja (Ω,A) o espaço mensurável escolhido e sejam $D = \{ A_1, A_2, \ldots , A_n, \ldots \}$ e $E = \{ B_1, B_2, \ldots , B_p, \ldots \}$ duas decomposições irredutíveis, às quais corresponderão classes de somas extraídas respectivamente S e T. Então, o teorema 14 dá $S = A = T$ e, consequentemente, todo o átomo B_p será uma soma de conjuntos A_n, mais precisamente uma soma com uma só parcela a fim de se respeitar a atomicidade de B_p. Concluímos que $E \leqslant D$. Se trocarmos os papéis de D e E, concluímos, semelhantemente, que $D \leqslant E$, donde $D = E$ conforme queríamos provar. Talvez valha a pena acrescentar que a igualdade $D = E$ não impede que os conjuntos comuns a D e a E se disponham por uma certa ordem em D e por outra ordem diferente em E, c. q. d.

Seja qual for o espaço mensurável (Ω,A), há sempre possibilidade de definir a classe A a partir duma classe geradora G de acessibilidade não inferior à de A, classe geradora essa que algumas vezes, por motivo de conveniência, escolhemos igual à própria classe A, mas que costumamos preferir igual a uma subclasse própria de A, em princípio tanto mais propícia quanto mais substancial for a economia de conjuntos. Em seguida, partindo de G, é natural que estejamos interessados em formar decomposições de (Ω,A) e, a partir daí, em chegar à única decomposição irredutível ou, na alternativa, em provar que todas as decomposições são redutíveis.

Caso $A = G^o$ seja a álgebra-σ mínima $\{ O,\Omega \}$, podemos escolher para G qualquer uma das 4 subclasses de A e, além disso, só podemos escolher a decomposição $\{\Omega\}$, que é elementar e irredutível. Em todos os demais casos, a classe G tem de ficar com algum conjunto mensurável G não-vazio e distinto de Ω; logo a fórmula 8') e a mensurabilidade de G^- conduzem à decomposição $\{G,G^-\}$, esta raras vezes irredutível. Ora o corolário 10' mostra que subtracções e intersecções binárias de conjuntos mensuráveis, pertencentes a G ou não, conduzem a subconjuntos por sua vez mensuráveis e, por isso, são susceptíveis de aplanar o caminho para a transformação duma decomposição redutível noutra decomposição *mais fina*, quer dizer com acréscimo de conjuntos mensuráveis. Explicando melhor: Formada uma decomposição $D = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ com mais do que um conjunto mensurável e posto de lado o caso de D ser a decomposição irredutível apetecida, D resulta redutível; então procuramos, servindo-nos dos conjuntos de G e D, primeiro um conjunto A_n que não seja átomo e depois um subconjunto não-vazio e mensurável A'_n propriamente contido em A_n; conseguido isso, a fórmula 17') dará a igualdade $A_n = A'_n \dot{+} (A_n - A'_n)$, o corolário 10' assegurará a mensurabilidade de $A_n - A'_n \neq O$ e poderá formar-se uma nova decomposição E, *mais fina do que* D, substituindo em D o conjunto A_n pelo par $A'_n, A_n - A'_n$. Enquanto não encontramos uma decomposição irredutível, podemos prosseguir com os *refinamentos* descritos e até podemos acelerar o processo efectuando eventualmente vários refinamentos em simultâneo. Quando pararmos, será ou por termos encontrado a decomposição irredutível pretendida ou por termos interrompido o processo por altura duma decomposição redutível, caso este em que pode tornar-se difícil discriminar se a eventual decomposição irredutível está ainda por encontrar ou nem sequer existe.

Acabamos de expor, em linhas gerais, um processo de *decomposição iterada*. A fim de orientar melhor os sucessivos passos desse processo, vamos apresentar o

Teorema 16. «Seja $D = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ uma decomposição do espaço mensurável (Ω, A), seja G uma classe geradora da álgebra-σ A e seja S a classe das somas extraídas de D. Então, D será irredutível se e só se $G \leqslant S$. Se esta relação falhar, todo o conjunto $G \varepsilon G$ tal que $G \varepsilon S^-$ determina um ou mais valores de n tais que O propriamente contido em $G \wedge A_n$ propriamente contido em A_n e assim permite refinar D substituindo cada um desses A_n pelo correspondente par $A_n \wedge G, A_n - G$.»

Demonstração. Comecemos por admitir que $G \leqslant S$ e usemos o simbolismo da geração de classes para o caso das classes geradas serem álgebras-σ. Então, a hipótese relativa a G, os resultados 56c) e b) e o teorema 14 dão $A = G^{o} \leqslant S^{o} = S \leqslant A$ ou seja $S = A$, de modo que a parte final do teorema 14 assegura a irredutibilidade de D.

Por outro lado, caso a relação $G \leqslant S$ falhe, então, escolhido um qualquer G pertencente a G e *exterior a S,* resulta $G = G \wedge (\dot{\sum_n} A_n) = \dot{\sum_n} (A_n \wedge G)$, onde a última soma não se pode reduzir a nenhuma subsoma de $\dot{\sum_n} A_n$. Logo existem intersecções mensuráveis $A_n \wedge G$ distintas de O e de A_n; cada uma dessas intersecções conduz, graças à fórmula 13"), a uma igualdade $A_n = (A_n \wedge G) \dot{+} (A_n - G)$, com $A_n - G$ não-vazio e mensurável. *Concluímos assim que D é redutível e pode ser refinada* substituindo cada um dos conjuntos A_n do tipo referido pelo correspondente par $A_n \wedge G$, $A_n - G$. Com isso fica completada a nossa demonstração.

Uma alternativa para o teorema 16 é o

Corolário 16'. «A decomposição D do teorema 16 é irredutível se e só se qualquer conjunto A_n pertencente a D intersectar todo o conjunto G pertencente a G ou segundo A_n ou segundo o vazio.»

Demonstração. Caso D seja redutível, o teorema 16 impõe que a condição do enunciado falhe para certos conjuntos $A_n \varepsilon A$ e $G \varepsilon G$. Por outro lado, caso D seja irredutível, o teorema 16 assegura que, seja qual for $G \varepsilon G$, vale $G = \dot{\sum_{n_p}} A_{n_p}$, com cada $A_{n_p} \varepsilon D$; logo, seja qual for n, a disjunção dois a dois dos elementos de D conduz a

$$A_n \wedge G = A_n \wedge (\dot{\sum_{n_p}} A_{n_p}) = \dot{\sum_{n_p}} (A_n \wedge A_{n_p}) = A_n \text{ ou a } A_n \wedge G = O,$$

consoante A_n figurar ou deixar de figurar entre os conjuntos A_{n_p}, c. q. d.

Caso A seja uma álgebra-σ finita, toda a classe geradora $G \leqslant A$ terá de ser finita. Neste contexto, é oportuno acrescentar ao teorema 16 o novo

Corolário 16". «Quando se parte duma classe geradora finita, a álgebra-σ gerada não só resulta finita, como também admite uma decomposição finita e irredutível.»

Demonstração. Seja G uma classe geradora finita em relação ao espaço mensurável (Ω,A), suponha-se formada uma decomposição finita D e represente-se por $S(D)$ a correspondente classe das somas extraídas. Caso D seja redutível, o teorema 16 permite--nos escolher um conjunto $G\varepsilon G$ exterior a $S(D)$ e, com esteio no conjunto G escolhido, obter uma decomposição mais fina E aproveitando, para o efeito, todas as intersecções $G \wedge A_n$ tais que O propriamente contido em $G \wedge A_n$ propriamente contido em A_n. Então, não só $S(D)$ propriamente contido em $S(E)$, com $S(E)$ a representar a classe das somas extraídas de E, como também todas as parcelas *não-vazias* de $\dot{\sum\limits_n} (A_n \wedge G) = G$ são conjuntos pertencentes a E, as parcelas $A_n \wedge G \neq A_n$ graças ao refinamento e as eventuais outras parcelas $A_n \wedge G = A_n$ por simples transmissão de D para E. Concluímos assim que, por um lado, os conjuntos de G pertencentes a $S(D)$ pertencem também a $S(E)$ e que, por outro lado, existem conjuntos de G pertencentes a $S(E)$ sem pertencerem a $S(D)$. Como $A_n \wedge G = (A_n \wedge G) \wedge G$, não só fica excluído o uso repetido de qualquer $G\varepsilon G$ para conseguir decomposiçes mais finas, como também a finititude de G limita o número de refinamentos. Assim haverá uma decomposição final *finita*, a qual será *irredutível*, isto por falta de conjuntos de G exteriores à correspondente classe das somas extraídas. Esta última classe será também finita e o teorema 14 obriga-a a coincidir com A. Fica assim completada a nossa demonstração.

Exemplo 45. Considere-se o espaço Ω cujos pontos ω são as funções reais da variável real x definidas no intervalo fechado $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Tome-se para A a álgebra-σ gerada pela classe $G = \{D, C, L\}$, onde D representa o conjunto das funções ω deriváveis, C representa o conjunto das funções ω contínuas e L representa o conjunto das funções ω limitadas. As propriedades das funções ω, conhecidas de estudos anteriores, mostram que $O \neq D$ propriamente contido em C propriamente contido em $L \neq \Omega$. Por outro lado, as fórmulas 8') e 13") mostram que $\Omega = L^- \dot{+} L$, $L = (L - C) \dot{+} C$ e $C = (C - D) \dot{+} D$, igualdades estas onde não figura nenhum conjunto vazio e onde todos os conjuntos são mensuráveis. Nesta conformidade, as propriedades da adição dão a igualdade $\Omega = D \dot{+} (C - D) \dot{+} (L - C) \dot{+} L^-$, a que corresponde a decomposição finita $D = \{D, C - D, L - C, L^-\}$. Ora o corolário 16" assegura a existência duma decomposição finita e irredutível, que ou será D ou será um refinamento de D. Como D,C e L são somas extraídas de D, o teorema 16 permite-nos concluir que D já é a decomposição irredutível procurada.

Exemplo 46. Dados o espaço $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e a classe G formada pelos 3 conjuntos $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,2,6,7\}$ e $C = \{2,3,5,6\}$, pede-se uma decomposição irredutível em relação à álgebra-σ gerada por G, decomposição essa com existência assegurada pelo corolário 16". — Se partirmos de $D_1 = \{A, A^-\}$, o conjunto B não pertence a $S(D_1)$ e assim permite-nos passar para a decomposição mais fina D_2 formada pelos 4 conjuntos $A \wedge B = \{1,7\}$, $A - B = \{3,5\}$, $A^- \wedge B = \{2,6\}$ e $A^- - B = \{4\}$. Como todos os conjuntos $G \varepsilon G$ pertencem a $S(D_2)$, o teorema 16 assinala D_2 como sendo a decomposição irredutível procurada, conclusão esta que também decorre do corolário 16'.

4. **Um teorema de existência duma decomposição irredutível**

Quando se interrompe um processo de decomposição iterada por altura duma decomposição redutível, é frequente não se saber se, sim ou não, há alguma decomposição irredutível. Veremos exemplos, um deles no § 14, em que se consegue provar a inexistência duma decomposição irredutível. Por ora, vamos apresentar mais uma situação especial (a acrescentar ao corolário 16") em que se pode assegurar a existência duma decomposição irredutível.

Com efeito, temos o

Teorema 17. «Caso o espaço mensurável (Ω, A') admita uma decomposição irredutível, o mesmo sucede com qualquer espaço mensurável (Ω, A) para o qual valha a relação A propriamente contido em A'.»

Demonstração. Provaremos a tese por um *método construtivo,* procedendo à formação efectiva duma decomposição irredutível de (Ω, A) debaixo da hipótese de (Ω, A') admitir uma decomposição irredutível, digamos $D' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_p, \ldots\}$. Sendo S' a classe das somas extraídas de D', sabemos, pelo teorema 14, que se tem a igualdade $A' = S'$, de modo que a classe A do enunciado resulta uma subclasse de S', seja a classe S (um S com significado diferente do de S do teorema 14) de conjunto genérico S. Como a definição de D' e o corolário 10' dão $\dot{\Sigma}_p A'_p = \Omega \varepsilon S$, fica assegurada a existência duma subclasse de S, digamos S_1, que abrange Ω e que é formada por todos os conjuntos $S_1 \varepsilon S$ tais que $S_1 \geqslant A'_1$. Então, seja qual for p, ou A'_p é parcela de todas as somas S_1 ou tal não é o caso; podemos dispor os A'_p sujeitos ao 1.º caso pela mesma ordem por que figuram em D', para obter conjuntos $A_{1,n_1}(n_1 = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que $A_{1,1} = A'_1$; se existirem conjuntos A'_p sujeitos ao 2.º caso, podemos dispor estes pela mesma ordem por que figuram em D', para obter conjuntos A'_{1,m_1} $(m_1 = 1, 2, 3, \ldots)$.

Pondo agora

$$\dot{\Sigma}_{n_1} A_{1,n_1} = A_1$$

e considerando a intersecção I_1 de todas as somas $S_1 \varepsilon S_1$, então, por um lado, a nota à fórmula 16) mostra que $I_1 \geqslant A_1$ e, por outro lado, as definições da intersecção e da adição mostram que todo o ponto pertencente a I_1 pertence a qualquer soma secante S_1 e, escolhida a soma S_1, não pode pertencer a nenhuma das suas eventuais parcelas A'_{1,m_1} ; assim concluímos $I_1 \leqslant A_1$, donde $I_1 = A_1$. Ora, se não houver conjuntos A'_{1,m_1}, então a única soma $S_1 = \Omega = A_1$ e logo $A_1 \varepsilon S$. Nos demais casos, seja qual for m_1, vamos seleccionar uma e só uma soma $S_{1,m_1} \varepsilon S_1 \leqslant S$, destituída da parcela A'_{1,m_1} ; o corolário 10' faz corresponder uma intersecção $J_1 = \bigwedge_{m_1} S_{1,m_1} \varepsilon S$, isto porque as somas secantes seleccionadas formam uma classe *intransnumerável.* † Nesta conformidade, não só a propriedade

† Que esta passagem da demonstração não é desproporcionada, vê-lo-emos quando introduzirmos o teorema 18.

monotónica da intersecção dá $J_1 \geqslant I_1$, como também a definição da intersecção não consente que algum ponto pertencente a J_1 pertença a qualquer um dos conjuntos A'_{1,m_1}, donde concluímos $J_1 \leqslant A_1$ e logo $J_1 = A_1 \varepsilon S$. Então, em qualquer dos casos $A_1 \varepsilon S$; como $A_1 \geqslant A_{1,1} = A'_1$, podemos acrescentar que $A_1 \varepsilon S_1$.

Posto isso, admitamos que um conjunto não-vazio $S \varepsilon S$ é subconjunto próprio de A_1 e, por isso, é destituído de parcelas A'_{1,m_1}. A soma S será também destituída da parcela $A_{1,1}$ porque, se não fosse assim, S seria uma soma S_1 e como tal conteria a intersecção A_1 de todas as somas S_1. Concluímos que S é uma subsoma *não-vazia* de $\dot{\sum}_{n_1 \neq 1} A_{1,n_1}$, seja a subsoma $\dot{\sum}_{h_1 \neq 1} A_{1,h_1}$, o que exige que n_1 possa assumir valores superiores a 1. Nesta conformidade, S terá um complemento $S^- \varepsilon S$ que a 1.ª propriedade da subtracção, a fórmula 18) e as propriedades da adição sujeitam à relação

$$S^- = (\dot{\sum_p} A'_p) - (\dot{\sum_{h_1 \neq 1}} A_{1,h_1}) = A_{1,1} \dot{+} (\dot{\sum_{n_1 \neq 1, h_1}} A_{1,n_1}) \dot{+} (\dot{\sum_{m_1}} A'_{1,m_1}) \varepsilon S_1,$$

com a última soma vazia caso não haja conjuntos A'_{1,m_1} e com a penúltima soma vazia caso se tenha $S = A_1 - A_{1,1}$. Então, $S^- \varepsilon S_1$ implica $S^- \geqslant I_1 = \dot{\sum_{n_1}} A_{1,n_1}$. Logo as propriedades da intersecção e da adição e a disjunção dos conjuntos A'_p, quando tomados dois a dois, conduzem a

$$\dot{\sum_{n_1}} A_{1,n_1} = (\dot{\sum_{n_1}} A_{1,n_1}) \wedge S^- = A_{1,1} \dot{+} (\dot{\sum_{n_1 \neq 1, h_1}} A_{1,n_1}),$$

pelo que caímos no absurdo de uma parcela não-vazia A_{1,n_1} de índice $n_1 > 1$ figurar na soma da esquerda sem figurar na soma da direita. Em suma, o conjunto A_1 *é um átomo em relação ao espaço mensurável* (Ω, A). †

Das duas uma: ou $A_1 = \Omega$ e está encontrada a decomposição irredutível (degenerada) $\{\Omega\}$ do espaço mensurável (Ω, A); ou $A_1 \neq \Omega$, existem conjuntos A'_{1,m_1} e podemos designar por $A_{2,1}$ o primeiro

† Mas nem sempre será átomo em relação a (Ω, A').

deles. Neste caso, fica assegurada a existência duma subclasse de S, digamos S_2, que abrange Ω e que é formada por todos os conjuntos $S_2 \varepsilon S$ tais que $S_2 \geqslant A_{2,1}$. Então, seja qual for p, ou A'_p é parcela de todas as somas S_2 ou tal não é o caso; podemos dispor por ordem os A'_p sujeitos ao 1.º caso, para obter conjuntos A_{2,n_2} ($n_2 = 1, 2, 3, \ldots$) em número pelo menos igual a 1; se existirem conjuntos A'_p sujeitos ao 2.º caso, podemos dispor estes por ordem, para obter conjuntos A'_{2,m_2} ($m_2 = 1, 2, 3, \ldots$). †

Pondo agora

$$\dot{\Sigma}_{n_2} A_{2,n_2} = A_2,$$

podemos seguir o processo utilizado a propósito de A_1 para concluir não só que A_2 pertence a S_2 e a S, como também que A_2 é um átomo em relação ao espaço mensurável (Ω, A), †† átomo este que por construção é distinto de A_1 e portanto é disjunto de A_1 (conforme se viu no n.º **1** logo a seguir à definição de átomo).

Das duas uma: ou a soma $A_1 \dot{+} A_2 = \Omega$ e está encontrada a decomposição irredutível $\{A_1, A_2\}$ do espaço mensurável (Ω, A); ou $A_1 \dot{+} A_2 \neq \Omega$, existem conjuntos $A'_{2,m_2} \varepsilon S'$ exteriores às somas A_1 e A_2 e podemos designar por $A_{3,1}$ o primeiro deles. Corresponde uma subclasse de S, digamos S_3, que abrange Ω e que é formada por todos os $S_3 \varepsilon S$ tais que $S_3 \geqslant A_{3,1}$. Qualquer um dos A'_p ou é parcela comum a todas as somas S_3 ou não o é; os A'_p sujeitos ao 1.º caso, dispostos por ordem, dão conjuntos A_{3,n_3} ($n_3 = 1,2,3,\ldots$) em número pelo menos igual a 1 e os A'_p restantes, se os houver, dispõem-se também por ordem e dão assim conjuntos A'_{3,m_3} ($m_3 = 1, 2, 3, \ldots$). †††

Pondo agora

$$\dot{\Sigma}_{n_3} A_{3,n_3} = A_3,$$

---

† A perspectiva de impossibilidade da inexistência de conjuntos A'_{2,m_2} não estorva o raciocínio.

†† Mas nem sempre será átomo em relação a (Ω, A').

††† A perspectiva de impossibilidade da inexistência de conjuntos A'_{3,m_3} não estorva o raciocínio.

podemos seguir o processo utilizado a propósito de A_1 e de A_2 para concluir não só que A_3 pertence a S_3 e a S, como também que A_3 é um átomo em relação ao espaço mensurável (Ω,A), † átomo este que por construção é distinto de A_1 e de A_2 e logo é disjunto de A_1 e de A_2.

Das duas uma: ou $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 = \Omega$ e está encontrada a decomposição irredutível $\{A_1, A_2, A_3\}$ do espaço mensurável (Ω,A); ou tal não sucede e prosseguirmos no estilo precedente. Então: ou o processo termina num átomo

$$\dot{\sum_{n_j}} A_{j,n_j} = A_j$$

e estará encontrada a decomposição irredutível $\{A_1, A_2, \ldots, A_j\}$ do espaço mensurável (Ω,A); ou o processo prossegue indefinidamente, dando lugar a uma sucessão de átomos

$$A_i = \dot{\sum_{n_i}} A_{i,n_i} \; (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

disjuntos dois a dois e extraídos da soma $\dot{\sum_p} A'_p$. Neste caso, a classe infinita $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots\}$ será uma decomposição irredutível de (Ω,A) desde que valha a igualdade $\dot{\sum_i} A_i = \Omega$.

Ora, seja qual for o valor do índice p: o conjunto A'_p só não é obrigatoriamente parcela de A_1 se $A_{2,1}$ for um A'_q de índice $q \leqslant p$; não entrando na soma A_1, o conjunto A'_p só não é obrigatoriamente parcela de A_2 se $A_{3,1}$ for um A'_q de índice $q \leqslant p$; etc. Como os conjuntos $A_{i,1}$ são conjuntos A'_q disjuntos entre si e em número infinito, concluímos que o índice q acaba por ultrapassar p, facto este que obriga o conjunto A'_p escolhido a ser parcela dalguma soma A_i. Portanto, seja qual for p, tem-se $A'_p \leqslant \dot{\sum_i} A_i$, donde $\dot{\sum_i} A_i \geqslant \dot{\sum_p} A'_p = \Omega$. Fica assim provado que $\dot{\sum_i} A_i = \Omega$; logo (Ω,A) admite a decomposição irredutível $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots\}$, c. q. d.

O teorema 17 tem uma aplicação bastante útil na hipótese de o espaço Ω ser um conjunto intransnumerável. Com efeito, temos o

---

† Mas nem sempre será átomo em relação a (Ω,A').

Corolário 17'. «Se o espaço Ω for intransnumerável, então qualquer espaço mensurável (Ω,A) admite uma decomposição irredutível.»

Demonstração. Sabemos, pelo exemplo 39, que $A' = 2^\Omega$ é a álgebra-σ máxima relativa a Ω. Então, escolhida arbitrariamente uma álgebra-σ A, tem-se $A \leqslant A'$, de modo que a tese ficará provada se conseguirmos referir uma decomposição irredutível de (Ω,A'). Mas uma tal decomposição existe efectivamente e não é senão a classe formada por todos os conjuntos elementares $\{\omega\}\varepsilon A'$, porque estes conjuntos são todos átomos em relação a (Ω,A'), formam uma classe intransnumerável e sujeitam-se, em virtude da fórmula 8"), à relação $\dot{\sum\limits_{\omega\varepsilon\Omega}} \{\omega\} = \Omega$, c. q. d.

5. A potência duma álgebra - σ

Em seguida vamos apresentar um teorema adicional que foca, dum modo talvez inesperado, a estrutura interna das álgebras-σ, além de estar relacionado com a primeira nota à demonstração do teorema 17.

Vejamos:

Teorema 18. «Caso o espaço mensurável (Ω,A) admita uma decomposição irredutível com $N \leqslant +\infty$ conjuntos, não só a hipótese $N < +\infty$ confere a A conjuntos mensuráveis em número de 2^N, como também a hipótese $N = +\infty$ institui A em classe com a potência do contínuo. Em aditamento, se todas as decomposições de (Ω,A) forem redutíveis, então A fica com potência igual ou superior à do contínuo.»

Demonstração. Seja $D = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ uma decomposição de (Ω,A) e seja S a classe das somas extraídas de D. Então, qualquer conjunto $S\varepsilon S$ está em correspondência recíproca com o número $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ tal que, seja qual for o valor do índice n, o algarismo a_n vale 1 caso A_n seja parcela da soma S e vale 0 no caso oposto. Portanto: se D for uma decomposição finita com N conjuntos, a classe S ficará com 2^N conjuntos; se D for uma decomposição infinita, faz-se uma análise no estilo da observação posta a seguir à fórmula 13") para chegar à conclusão que S é uma classe com a potência do contínuo.

Posto isto, caso (Ω,A) admita a decomposição irredutível D, sabemos, pelo teorema 15, que ela é única e sabemos, pelo teorema 14, que $A = S$; logo A satisfaz à parte principal da tese.

Vejamos agora a parte adicional da tese. Como todas as decomposições se supõem redutíveis, o teorema 16 permite refinar qualquer decomposição finita; então, haverá uma decomposição D infinita, a correspondente classe S terá a potência do contínuo, o teorema 14 assegurará a relação $S \leqslant A$ e, portanto, A ficará com potência igual ou superior à do contínuo, c. q. d.

Acrescentamos, a título de curiosidade, a seguinte consequência óbvia do teorema 18:

Corolário 18'. «Qualquer álgebra-σ finita tem conjuntos em número igual a uma potência perfeita de 2. Por outro lado, não existe nenhuma álgebra-σ infinita que tenha a potência do numerável.»

Fechamos o parágrafo com alguns exemplos e exercícios.

Exemplo 47. Tomando para Ω o espaço formado pelos números naturais, considere-se a álgebra-σ A gerada pela classe numerável G cujo conjunto genérico $G_n(n = 2,3,4,\ldots)$ é o conjunto formado pelos números naturais divisíveis por n. Então, o corolário 17' garante a existência duma decomposição irredutível de (Ω,A); como $A \geqslant G$, é A uma classe infinita, de modo que o teorema 18 obriga a decomposição irredutível a ser infinita e logo obriga A a ter a potência do contínuo.

Exemplo 48. Tomando para Ω o espaço formado pelos 32 primeiros números naturais, considere-se a álgebra-σ A gerada pela classe $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$

onde

$$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$G_2 = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},$$

$$G_3 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\},$$

$$G_4 = \{3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 27, 28, 29, 30\},$$

$$G_5 = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31\}.$$

Sabemos antecipadamente, ou pelo corolário 16" ou pelo corolário 17', que o espaço mensurável (Ω, A) admite uma decomposição finita † e irredutível. Guiando-nos pelo processo de decomposição iterada governado pelo teorema 16 ou pelo corolário 16', vamos formar sucessivamente a decomposição $D_1 = \{G_1, G_1^-\}$ e o refinamento D_2 [ou D_3, D_4, D_5] que resulta de D_1 [ou D_2, D_3, D_4] *devido ao evento de* G_2 [ou G_3, G_4, G_5] *não se sujeitar ao prescrito no corolário* 16'. — Chegados à classe D_5, reconhecemos que ela se compõe dos 32 conjuntos elementares contidos em Ω. Logo D_5 é a decomposição irredutível procurada, pelo que o teorema 18 atribui a A conjuntos mensuráveis em número de $2^{32} = 4294967296$. Em suma, *uma álgebra-σ com mais do que* 4 *biliões de conjuntos gerada por uma classe com apenas* 5 *conjuntos*! Eis uma razão excelente para considerarmos úteis as classes geradoras de álgebra-σ.

Exercício 46. Tomando para Ω o espaço formado pelos 10 primeiros números naturais, considere a classe G composta pelos 4 conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{4, 5\}$ e $\{4, 8, 9\}$ e, em seguida, forme uma decomposição irredutível do espaço mensurável (Ω, G°) (G° igual à álgebra-σ gerada por G).

Exercício 47. Tomando para Ω o espaço formado pelos pontos ω que são as funções complexas da variável complexa z definidas no círculo $\{ |z| < +\infty \}$, construa a álgebra-σ gerada pela classe $G = \{C, D, E\}$, onde C representa o conjunto das funções ω ilimi-

† Com Ω finito, não pode haver decomposições infinitas.

tadas, D representa o conjunto das funções ω deriváveis (também chamadas analíticas ou holomorfas) e E representa o conjunto das funções ω limitadas e deriváveis.

Exercício 48. Dados um espaço Ω, um número natural M e conjuntos $A_m \leqslant \Omega$ $(m = 1,2,\ldots, M)$ distintos entre si, utilize a classe formada pelos 2^M conjuntos do desenvolvimento de

$$\bigwedge_{1 \leqslant m \leqslant M} (A_m \dotplus A_m^-)$$

para provar que a álgebra-σ gerada pela classe

$$G = \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$$

não pode comportar mais do que $2^{(2^M)}$ conjuntos, número máximo esse que foi atingido no caso do exemplo 48.

§ 14 — A RECTA DE BOREL

1. Generalidades

Dada uma recta real X(x) [ou alargada $\overline{X}(x)$], considerem-se os intervalos mistos da forma $\{a \leqslant x < b\}$, com a e $b \geqslant a$ constantes e finitos [ou diferentes de $+\infty$]. A estes intervalos vamos chamar *intervalos principais lineares* ou *unidimensionais* ou *a uma dimensão,* abreviadamente *intervalos principais* se não houver risco de confusão com outras dimensionalidades que possam aparecer.

Posto isso, o conjunto *O* é um intervalo principal (correspondente ao caso a = b) e dois intervalos principais intersectam-se segundo um novo intervalo principal, facto este que se reconhece examinando uma a uma as diversas possibilidades de intervalos intervenientes.

Por outro lado, dois intervalos principais *contíguos,* quer dizer tais que o extremo direito dum deles coincide com o extremo esquerdo do outro, podem sempre *somar-se* e dão uma soma que será por sua vez um intervalo principal. Nesta conformidade, pode transcrever-se a parte do exemplo 30 relativa a conjuntos A e $B \geqslant A$, com a particularidade de que agora os intervalos A_1 e A'_1 $(1 = 0, 1, 2)$ são todos intervalos principais. Em face do exposto, concluímos que é um *semianel* a classe infinita G [ou $\overline{G}$] formada pelos intervalos principais contidos em X [ou $\overline{X}$]. Este semianel gera uma álgebra-σ $G^o = B$ [ou $\overline{G}^{\square} = \overline{B}$] a que vamos chamar *ál-*

gebra de Borel [eventualmente *alargada*] *linear* ou *unidimensional* ou *a uma dimensão,* abreviadamente *álgebra de Borel* [eventualmente *alargada*] se não houver dúvida relativa à dimensionalidade. Talvez seja altura de chamar a atenção para a relação óbvia G propriamente contido em $\overline{G}$, válida em relação a $\overline{X}$ ou talvez melhor em $2^{\overline{X}}$.

Posto isso: aos conjuntos $B \varepsilon \mathcal{B}$ [ou $\overline{B} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}$] vamos chamar *conjuntos de Borel* ou *borelianos lineares* ou *unidimensionais* ou *a uma dimensão,* abreviadamente *conjuntos de Borel* ou *borelianos;* ao espaço mensurável $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ [na alternativa $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$], em escrita simplificada $(X,\mathcal{B})$ [na alternativa $(\overline{X},\overline{\mathcal{B}})$], vamos chamar *recta de Borel* [eventualmente *alargada*] ou *espaço de Borel unidimensional* ou *a uma dimensão* [eventualmente *alargado*]. Acrescentemos que o resultado 56a) dá $G \leqslant \mathcal{B}$ [ou $\overline{G} \leqslant \overline{\mathcal{B}}$], de modo que $\mathcal{B}$ [ou $\overline{\mathcal{B}}$] resulta uma classe infinita e logo, atendendo ao teorema 18, uma classe com potência igual ou superior à do contínuo.

Observação. O estudo precedente pode adaptar-se aos intervalos mistos da forma $\{a < x \leqslant b\}$, com a e $b \geqslant a$ constantes e finitos [ou diferentes de $-\infty$], os quais formam uma classe: que abrange o conjunto O; que é fechada com respeito à intersecção binária; que é fechada com respeito à adição binária, desde que haja contiguidade; que se constitui em semianel infinito. Se não escolhemos esses intervalos, foi apenas por uma questão de opção pariforme. Outro tanto já não vale para intervalos abertos [ou fechados], para os quais a operatória já não é tão propícia.

2. Borelianos (lineares) mais importantes

A seguir vamos caracterizar uma classe de borelianos (lineares) a que pertencem muitos dos mais importantes conjuntos contidos em X [ou $\overline{X}$]. Temos o

Teorema 19. «Dada uma recta de Borel [eventualmente alargada], é boreliano (linear) todo o conjunto intervalar e todo o conjunto intransnumerável.»

Demonstração. Seja n o número natural genérico, tenha-se em conta o resultado 56a) e o corolário 10' e não se esqueça a relação G propriamente contido em $\overline{G}$, válida em $2^{\overline{X}}$. Então, sejam quais forem os números finitos a e $b \geqslant a$, pertencem simultaneamente a $B = G^o$ e a $\overline{B} = \overline{G}^{\square}$ os seguintes conjuntos: o vazio O;

$$\{a \leqslant x < b\} \,\varepsilon G,\ \bigwedge_n \{a \leqslant x < a + 1/n\} = \{a\}$$

(transcrevível de a para b),

$$\{a \leqslant x < b\} - \{a\} = \{a < x < b\},$$

$$\{a < x < b\} \dotplus \{b\} = \{a < x \leqslant b\}$$

e $$\{a < x \leqslant b\} \dotplus \{a\} = \{a \leqslant x \leqslant b\};$$

$$\bigvee_n \{a \leqslant x < a + n\} = \{a \leqslant x < +\infty\}$$

e $$\{a \leqslant x < +\infty\} - \{a\} = \{a < x < +\infty\},$$

ambos transcrevíveis de a para b;

$$\bigvee_n \{a - n \leqslant x < b\} = \{-\infty < x < b\}$$

e $$\{-\infty < x < b\} \dotplus \{b\} = \{-\infty < x \leqslant b\},$$

ambos transcrevíveis de b para a; por fim,

$$\{-\infty < x < b\} \dotplus \{b \leqslant x < +\infty\} = X.$$

Em suma, qualquer intervalo contido em X será um boreliano pertencente simultaneamente a B e a $\overline{B}$.

Para completar a parte da tese relativa a intervalos, só falta mostrar que pertence a $\overline{B}$ qualquer intervalo contido em $\overline{X}$ que não seja intervalo contido em X. É o que sucede efectivamente porque pertencem a $\bar{B}$ os seguintes conjuntos: o espaço $\bar{X}$;

$$\{-\infty \leqslant x < b\} \varepsilon \bar{G} \text{ e } \{-\infty \leqslant x < b\} \dot{+} \{b\} =$$
$$= \{-\infty \leqslant x \leqslant b\},$$

ambos transcrevíveis de b para a;

$$\bigwedge_n \{-\infty \leqslant x < -n\} = \{-\infty\}$$

e $$(\bar{X} - X) - \{-\infty\} = \{+\infty\};$$

$$\{a \leqslant x < +\infty\} \dot{+} \{+\infty\} = \{a \leqslant x \leqslant +\infty\}$$

e $$\{a \leqslant x \leqslant +\infty\} - \{a\} = \{a < x \leqslant +\infty\},$$

ambos transcrevíveis de a para b; por fim,

$$X \dot{+} \{+\infty\} = \{-\infty < x \leqslant +\infty\}$$

e $$X \dot{+} \{-\infty\} = \{-\infty \leqslant x < +\infty\}.$$

Posto isso, já se referiu que qualquer intervalo degenerado contido em X [ou $\bar{X}$], vazio ou elementar, é um boreliano pertencente a B [ou $\bar{B}$]. Por outro lado, qualquer conjunto $A \leqslant X$ [ou $\bar{A} \leqslant \bar{X}$] que seja intransnumerável e tenha mais do que um ponto é um conjunto que pode escrever-se, atendendo à fórmula 8"), sob a forma

$$\dot{\sum_{x \epsilon A}} \{x\} \text{ [ou } \dot{\sum_{x \epsilon \bar{A}}} \{x\} \text{]}$$

e, por isso, pertence forçosamente a B [ou $\bar{B}$]. Fica assim completada a nossa demonstração.

Exemplo 49. Vale a seguinte asserção: «Nenhuma recta de Borel [eventualmente alargada] pode admitir alguma decomposição irredutível.» — Com efeito, seja X(x)[ou $\bar{X}$(x)] a recta real [eventualmente alargada] subjacente à recta de Borel (X, B)[ou $(\overline{\mathrm{X}}, \overline{B})$] proposta. Então, a fórmula 8"), a mensurabilidade de todos os conjuntos elementares $\{x\}$ e a existência duma decomposição irredutível imporiam a igualdade

$$\mathrm{X} = \dot{\sum_{x \in \mathrm{X}}} \{x\} \; [\text{ou } \overline{\mathrm{X}} = \dot{\sum_{x \in \overline{\mathrm{X}}}} \{x\}]$$

com uma adição intransnumerável. Ora tal é incompatível com o facto de X [ou $\overline{\mathrm{X}}$] ser um conjunto com a potência do contínuo.

Exemplo 50. Recordando mais uma vez o corolário 10', vamos acrescentar mais alguns borelianos que não serão todos intervalares ou intransnumeráveis:

a) o conjunto $\infty = \{-\infty\} \dot{+} \{+\infty\}$ é finito e logo pertence a $\overline{B}$;

b) o conjunto R formado pelos números racionais é numerável e logo pertence a B e a $\overline{B}$;

c) o conjunto formado pelos números irracionais é igual a $\mathrm{X} - \mathrm{R}$ e logo pertence a B e a $\overline{B}$;

d) o conjunto $\mathrm{K} = \{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ −

$$- [\mathop{V}_{1 \leqslant n < +\infty} (\dot{\sum_{1 \leqslant m \leqslant 3^{n-1}}} \{ \frac{3m-2}{3^n} < x < \frac{3m-1}{3^n} \})],$$

vulgarmente denominado conjunto ternário e/ou de Cantor, resulta de intervalos contidos em X por uma subtracção e por uma união intransnumerável, pelo que é um conjunto pertencente a B e a $\overline{B}$. — Note-se que cada parcela do diminuidor de K está contida em $\{0 \leqslant x \leqslant 1\} = \mathrm{I}$ e logo, pela nota à fórmula 16), o próprio diminuidor é subconjunto de I. Caso figuremos a recta real dada X(x) como um eixo real: a união V de somas I_n (do tipo aqui referido) a retirar de I, pela propriedade absorvente da união desembaraçável de qualquer parcela que esteja contida noutra, terá primeira parcela I_1 coincidente com o terço central aberto do intervalo I, terá segunda parcela I_2 redutível à soma dos terços centrais abertos dos dois intervalos em que se decompõe $I-I_1$, terá terceira parcela I_3 redutível à soma dos terços centrais abertos dos 2^2 intervalos em que se decompõe $(I-I_1)-I_2$, etc. — Se usarmos o sistema de numeração *ternário* (de base 3), os números pertencentes a I são os da forma $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, com mantissa constituída por algarismos 0,1 e 2, e os números pertencentes a K obtêm-se suprimindo nos anteriores primeiro aqueles para os quais a_1 possa tomar o valor 1, depois aqueles para os quais a_2 possa tomar o valor 1, em seguida aqueles para os quais a_3 possa tomar o valor 1, etc. Logo os números de K são os da forma $0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, com mantissa constituída por algarismos 0 e 2. Substituindo 2 formalmente por 1, concluímos que K tem a potência do contínuo, isto através duma análise muito similar à feita na observação que segue à fórmula 13”).

Voltando à recta real $X(x)[$ou $\bar{X}(x)]$, convencionemos chamar *fechado* a todo o conjunto $A \leqslant X$ [ou $\bar{A} \leqslant \bar{X}$] tal que esteja contido em A [ou $\bar{A}$] o conjunto (eventualmente vazio) formado pelos pontos x que sejam pontos de acumulação de A [ou $\bar{A}$]. Então, o conjunto O será fechado e o mesmo sucede ao espaço X [ou $\bar{X}$] (muito embora X deixe de ser fechado na qualidade de subconjunto do espaço $\bar{X}$). Por outro lado, convencionemos chamar *aberto* ao conjunto O, quando considerado como subconjunto de X, e a todo o conjunto não-vazio $A \leqslant X$[ou $\bar{A} \leqslant \bar{X}$] que seja formado exclusivamente por *pontos interiores*, quer dizer pontos tais que cada um deles seja interior a algum intervalo contido em A [ou $\bar{A}$]. Então, cada um dos conjuntos O e X resulta simultaneamente aberto e fechado em X. Nesta conformidade, sabe-se que há conjuntos contidos em X [ou $\bar{X}$] não abertos nem fechados (por exemplo os conjuntos de b) e c) do exemplo 50), que um intervalo aberto [ou fechado] é um conjunto aberto [ou fechado] e que um conjunto $A \leqslant X$ é fechado se e só se o seu complemento $X - A$ for aberto.

Entre os borelianos que são intervalos abertos, merecem destaque os da forma $\{a < x < b\}$, com a e $b > a$ racionais, a que vamos chamar *intervalos racionais abertos* e que dependem de dois parametros a e b, cada um dos quais admite apenas uma infinidade numerável de opções. Nestas condições, sabemos que é numerável a classe formada pelos intervalos racionais abertos, sejam os intervalos $J_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, todos eles borelianos em B e em $\overline{B}$.

Postas essas premissas, vamos apresentar o

Teorema 20. «Dado uma recta de Borel [eventualmente alargada], é boreliano (linear) todo o conjunto aberto e todo o conjunto fechado.»

Demonstração. Seja $X(x)$ [ou $\overline{X}(x)$] a recta real dada, tomemos em conta que todo o conjunto aberto $\overline{A} \leqslant \overline{X}$ é também um conjunto aberto $A \leqslant X$ e lembremos que O e X pertencem ambos a B e a $\overline{B}$. Por outro lado, escolhido arbitrariamente um conjunto A propriamente contido em X [ou $\overline{X}$], aberto e não-vazio, corresponder-lhe-á a classe formada por todos os intervalos racionais abertos $J_n \leqslant A$ e logo corresponde a união intransnumerável conducente ao conjunto $\underset{J_n \leqslant A}{V} J_n = J_A$, este boreliano graças ao corolário 10'. Pela nota à fórmula 16), temos a relação $J_A \leqslant A$ e só falta deduzir a relação $J_A \geqslant A$ para que fique provada a igualdade $A = J_A$ ou seja a parte da tese relativa a conjuntos abertos.†

Ora a fórmula 8") dá $A = \dot{\sum\limits_{x \in A}} \{x\}$, todo o ponto $x \varepsilon A$ é *interior* a um intervalo $J_x \leqslant A$, para cada $x \varepsilon A$ podemos meter dois números racionais a e b interiores a J_x com $a < x$ e $b > x$, o correspondente intervalo racional aberto de extremos a e b será um $J_n \leqslant A$, ter-se-á $\{x\} \leqslant J_n \leqslant A$ para algum n donde $\{x\} \leqslant J_A$ e, por fim, a nota à fórmula 16) dá $A \leqslant J_A$.

Falta considerar a parte da tese relativa a conjuntos fechados. Se trabalharmos em (X,B), esta parte decorre do corolário 10' e do facto de qualquer conjunto fechado F ser o complemento dum

---

† A igualdade $A = J_A$ corresponde a um teorema clássico cujo conhecimento não se pressupõe aqui.

conjunto aberto $A \leqslant X$. Podemos interpretar A como boreliano contido em $\overline{X}$ e escrever a igualdade $F = X - A = (\overline{X} - \infty) - A$, de modo que o teorema 19, a alínea a) do exemplo 50 e o corolário 10' provam a relação $F \varepsilon \overline{B}$. Posto isso, qualquer conjunto fechado $\overline{F} \leqslant \overline{X}$ sujeita-se à igualdade $\overline{F} = \overline{F} \wedge (X \dot{+} \infty) = (\overline{F} \wedge X) \dot{+} (\overline{F} \wedge \infty)$, onde a penúltima intersecção é um conjunto $F \varepsilon \overline{B}$ e onde a última intersecção é um conjunto finito que o teorema 19 obriga a pertencer a $\overline{B}$. Logo o corolário 10' permite terminar a nossa demonstração.

3. Classes geradoras de B

Em seguida, dada a recta real X(x), vamos procurar classes geradoras da correspondente álgebra de Borel B que sejam distintas do semianel gerador G até agora usado. Encontraremos classes geradoras mais económicas do que G, outras menos económicas (mas porventura melhor estruturadas) e ainda classes geradoras nem mais nem menos económicas (havendo porém o benefício da opção em relação a G). Toda a geração envolvida será de álgebras-σ e recorrermos bastante ao corolário 10' e aos resultados 56).

a) *É gerador de B o semianel I* † *formado por todos os intervalos contidos em* X. Com efeito, são evidentes as relações $G \leqslant I$ e $G^o = B$ e, além disso, o teorema 19 dá $I \leqslant B$. Logo $G \leqslant I \leqslant G^o$, donde a tese $I^o = B$.

b) *É geradora de B a classe* G_1 [ou G_2] *formada por todos os intervalos limitados que sejam abertos* [ou *fechados*]. Com efeito, é óbvia a relação $I \geqslant G_1$ [ou G_2], da qual inferimos $B \geqslant G_1^o$ [ou G_2^o]. Por outro lado, sejam quais forem os números finitos a e $b \geqslant a$, tem-se

$$\{a \leqslant x < b\} = \bigwedge_{1 \leqslant n < +\infty} \{a - \frac{1}{n} < x < b\}$$

$$[\text{ou} \bigvee_{1 \leqslant n < +\infty} \{a \leqslant x \leqslant b - \frac{1}{n}\}].$$

† Veja-se o exemplo 30.

Logo $G \leqslant G_1^\circ$ [ou G_2°], donde $B \leqslant G_1^\circ$ [ou G_2°]. A tese $B = G_1^\circ$ [ou G_2°] segue.

c) É geradora de B a classe H_1[ou H_2] *formada por todos os conjuntos abertos* [ou *fechados*]. Com efeito, é óbvia a relação $H_1 \geqslant G_1$ [ou $H_2 \geqslant G_2$] e, além disso, o teorema 20 dá

$B \geqslant H_1$ [ou H_2]. Logo $G_1 \leqslant H_1 \leqslant B = G_1^\circ$

[ou $G_2 \leqslant H_2 \leqslant B = G_2^\circ$], donde a tese $B = H_1^\circ$ [ou H_2°].

d) É geradora de B a classe K_1 [ou K_2] *formada pelos intervalos da forma*

$$\{-\infty < x < a\} \text{ [ou} \{a \leqslant x < +\infty\} \text{]},$$

com a finito e arbitrário. Com efeito, é óbvia a relação $I \geqslant K_1$[ou K_2], donde $B \geqslant K_1^\circ$ [ou K_2°]. Por outro lado, qualquer intervalo principal $\{a \leqslant x < b\}$ pode igualar-se à diferença

$$\{-\infty < x < b\} - \{-\infty < x < a\}$$

$$\text{[ou } \{a \leqslant x < +\infty\} - \{b \leqslant x < +\infty\}\text{]},$$

donde a relação $G \leqslant K_1^\circ$ [ou K_2°], a qual implica $B \leqslant K_1^\circ$ [ou K_2°].

A tese $B = K_1^\circ$ [ou K_2°] segue.

Nesta altura, talvez convenha referir que *todas as classes geradoras até agora consideradas* dependem no mínimo de 1 ou 2 parâmetros, cujos valores admissíveis preenchem sempre um conjunto *com a potência do contínuo.*

e) É geradora de B a subclasse $L_1 \leqslant K_1$ [ou $L_2 \leqslant K_2$] *que se obtém eliminando de* K_1 [ou K_2] *todos os intervalos para os quais a seja irracional.* Com efeito, é imediata a relação $B \geqslant L_1^\circ$ [ou L_2°].

Por outro lado, qualquer conjunto da forma

$$\{-\infty < x < a\} \text{ [ou } \{a \leqslant x < +\infty\}\text{]}$$

é igual a uma união $\underset{n}{\vee}\{-\infty < x < r_n\}$ [ou intersecção $\underset{n}{\wedge}\{r_n \leqslant x < +\infty\}$], com números racionais r_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) que se constituem em sucessão estritamente crescente e convergente para a. Logo $K_1 \leqslant L_1^\circ$ [ou $K_2 \leqslant L_2^\circ$], donde $B \leqslant L_1^\circ$ [ou L_2°]. A tese $B = L_1^\circ$ [ou L_2°] segue.

Talvez convenha referir que a classe geradora L_1 [ou L_2] é uma classe numerável, uma economia que porventura não seja de desprezar e que é a melhor possível, visto o corolário 16" excluir a eventualidade duma classe geradora finita.

f) Fixe-se arbitrariamente um número $c \varepsilon \overline{X}$, ou finito ou igual a $-\infty$ ou igual a $+\infty$. A hipótese $c = -\infty$ permite considerar a classe formada pelos intervalos abertos, contidos em X, que sejam limitados à direita e *emergentes* de c (quer dizer com extremo esquerdo igual a $-\infty$); a hipótese $c = +\infty$ permite considerar a classe formada pelos intervalos, contidos em X, que sejam fechados à esquerda e *emergentes* de *c* (quer dizer com extremo direito igual a $+\infty$); a hipótese $c \neq \pm\infty$ permite considerar a classe formada pelos intervalos principais, contidos em X, que sejam *emergentes* de c (quer dizer tenham um extremo igual a c).

Em qualquer das 3 hipóteses, vamos representar por M_c a classe definida, óbviamente variável com c, a qual é de índole que se vai revelar útil no estudo das chamadas medidas de Lebesgue-Stieltjes (lineares).

Nesta conformidade, vale a seguinte asserção: «*É geradora de B a classe M_c, isto seja qual for a escolha de* c.» — Com efeito, se $c = -\infty$ [ou $+\infty$], então M_c coincide com a classe K_1 [ou K_2] da alínea d) e a prova está feita. Se $c \neq \pm\infty$, então, escolhido arbitrariamente um intervalo principal $\{a \leqslant x < b\}$:

ou se tem $c < a$ e $\{a \leqslant x < b\} = \{c \leqslant x < b\} - \{c \leqslant x < a\}$;

ou se tem $a \leqslant c \leqslant b$ e $\{a \leqslant x < b\} = \{a \leqslant x < c\} + \{c \leqslant x < b\}$;

ou se tem $c > b$ e $\{a \leqslant x < b\} = \{a \leqslant x < c\} - \{b \leqslant x < c\}$.

Seja como for, resulta $G \leqslant M_c^o$, donde $B \leqslant M_c^o$. Por outro lado, é óbvia a relação $M_c \leqslant I$, a qual implica $M_c^o \leqslant B$. A tese $B = M_c^o$ segue.

Exemplo 51. Retome-se o exemplo 40 na versão correspondente à recta real X(x). A álgebra K aí definida construiu-se por forma que ela contivesse o semianel G. Por outro lado, qualquer conjunto pertencente a K é a soma dum número finito de intervalos e, portanto, pertence a B. Logo $G \leqslant K \leqslant B$, donde $B = K^o$. Em suma, *K é uma álgebra geradora de B.*

Exercício 49. Dada a recta real X, mostre que é gerador de B o semianel definido na observação posta na parte final do n.º 1 do § 14.

Exercício 50. Dada a recta real X, mostre que é geradora de B a classe numerável formada pelos intervalos racionais abertos.

Exercício 51. Dada a recta real X, mostre que é uma álgebra-σ, contida em B, a classe A formada pelos conjuntos A $\leqslant$ X que sejam intransnumeráveis e formada também pelos complemenntos A^- desses conjuntos. Prove ainda o seguinte: *a classe A é a álgebra-σ gerada pela classe que se compõe de todos os conjuntos elementares contidos em X.* Por fim, generalize, substituindo X por um espaço transnumerável arbitrário (compare com o exercício 38).

4. Relacionamento entre B e $\overline{B}$

Vamos terminar este parágrafo procurando aprofundar o relacionamento entre a recta de Borel [X(x), B(B)] e a correspondente recta de Borel alargada [$\overline{\mathrm{X}}$(x), $\overline{B}$($\overline{\mathrm{B}}$)]. Para o efeito, recorreremos ao corolário 10' e aos resultados 56) e usaremos os símbolos ^{o} e $^\square$ para a geração de álgebras-σ tiradas respectivamente de X e de $\overline{\mathrm{X}}$.

O teorema seguinte envolve simultaneamente dois espaços diferentes e, por isso, é um tanto antecipado. Todavia ele constitui a chave para a questão que nos preocupa, pelo que vamos apresentá-lo aqui sob forma autónoma. Vejamos:

Teorema 21. «Dadas a recta real X e a correspondente recta real alargada $\overline{\mathrm{X}}$, considerem-se a álgebra de Borel B tirada de X, uma classe M geradora de B e o conjunto genérico $\overline{\mathrm{Z}} \leqslant \infty$ propriamente contido em $\overline{\mathrm{X}}$.† Se interpretarmos cada conjunto $\mathrm{B}\varepsilon B$ como conjunto contido em $\overline{\mathrm{X}}$, então a classe $\overline{A}$ formada pelas somas $\mathrm{B} \dot{+} \overline{\mathrm{Z}} = \overline{\mathrm{A}}$ possíveis constitui-se em álgebra-σ tirada de $\overline{\mathrm{X}}$, a qual é sobreclasse própria de B, admite a classe geradora $M \dot{+} \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\}$ e, caso existam conjuntos $\mathrm{M_n}\varepsilon M(\mathrm{n}=1,2,3,\ldots)$ com união igual a X, admite também as classes geradoras $M \dot{+} \{\{-\infty\}\}$ e $M \dot{+} \{\{+\infty\}\}$.»

Demonstração. a) Como B resulta de $\overline{\mathrm{A}}$ particularizando $\overline{\mathrm{Z}}$ para o conjunto vazio, reconhece-se imediatamente que vale a relação B propriamente contido em $\overline{A}$. Por outro lado, $\overline{A}$ é uma álgebra-σ tirada de $\overline{\mathrm{X}}$. De facto, escolhida arbitrariamente uma soma $\mathrm{B} \dot{+} \overline{\mathrm{Z}} = \overline{\mathrm{A}}\varepsilon\overline{A}$, a relação $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{B} \dot{+} (\mathrm{X}-\mathrm{B}) \dot{+} \overline{\mathrm{Z}} \dot{+} (\infty - \overline{\mathrm{Z}})$ e a fórmula 18) mostram que $\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-\mathrm{B}) \dot{+} (\infty - \overline{\mathrm{Z}})\varepsilon\overline{A}$; por outro lado, escolhidos arbitrariamente conjuntos $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{n}\varepsilon\overline{A}\,(\mathrm{n}=1,2,3,\ldots)$, cada $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{n}$ é da forma $\mathrm{B_n} \dot{+} \overline{\mathrm{Z}}_\mathrm{n}$, com $\mathrm{B_n}\varepsilon B$ e com $\overline{\mathrm{Z}}_\mathrm{n} \leqslant \infty$, e, portanto, as propriedades da adição e da união dão $\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}}\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{n} = (\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}}\mathrm{B_n}) \dot{+} (\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}}\overline{\mathrm{Z}}_\mathrm{n})$, com primeira parcela pertencente a B e com segunda parcela contida em ∞, donde se conclui que $\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}}\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{n}\varepsilon\overline{A}$.

b) Falta provar a parte da tese relativa a classes geradoras de $\overline{A}$. Temos a hipótese $B = M^{\circ}$ e, pondo

$$M \dot{+} \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\} = \overline{N} \quad [\text{ou } M \dot{+} \{\{-\infty\}\} = \overline{N}'$$

$$\text{ou } M \dot{+} \{\{+\infty\}\} = \overline{N}''],$$

temos a tese $\overline{A} = \overline{N}^{\square}$[ou $\overline{N}'^{\square}$ ou $\overline{N}''^{\square}$]. Podemos escolher um B vazio e um $\overline{\mathrm{Z}}$ igual ou a $\{-\infty\}$ ou a $\{+\infty\}$ e assim reconhecemos que $\{-\infty\}$ e $\{+\infty\}$ são conjuntos $\overline{\mathrm{A}}$ possíveis. Além disso,

† Talvez convenha recordar a definição $\infty = \{-\infty, +\infty\}$.

sabemos, por a), que $\bar{A}$ contém propriamente B, sendo óbvio que vale $B \geqslant M$. Concluímos que $\bar{A} \geqslant \bar{N}$ [ou $\bar{N}'$ ou $\bar{N}''$] ; logo a álgebra-σ $\bar{A} \geqslant \bar{N}^{\square}$ [ou $\bar{N}'^{\square}$ ou $\bar{N}''^{\square}$]. Consequentemente, a nossa demonstração ficará completada se conseguirmos deduzir a relação $\bar{A} \leqslant \bar{N}^{\square}$ [ou $\bar{N}'^{\square}$ ou $\bar{N}''^{\square}$].

c) Quando se trabalha com a classe $\bar{N}$ [ou $\bar{N}'$ ou $\bar{N}''$], é óbvio que pertencem a $\bar{N}^{\square}$ [ou $\bar{N}'^{\square}$ ou $\bar{N}''^{\square}$] o espaço $\bar{X}$ e cada um dos conjuntos

$$\{-\infty\} \text{ e } \{+\infty\} \text{ [ou } \{-\infty\} \text{ e X ou } \{+\infty\} \text{ e X],}$$

pelo que pertence também a $\bar{N}^{\square}$ [ou $\bar{N}'^{\square}$ ou $\bar{N}''^{\square}$] o conjunto

$$(\bar{\mathrm{X}} - \{-\infty\}) - \{+\infty\} = \mathrm{X}$$

$$\text{[ou } (\bar{\mathrm{X}} - \mathrm{X}) - \{-\infty\} = \{+\infty\}$$

$$\text{ou } (\bar{\mathrm{X}} - \mathrm{X}) - \{+\infty\} = \{-\infty\}\text{].}$$

Nesta conformidade, se representarmos por $\bar{P}$ indistintamente qualquer uma das classes $\bar{N}$ ou $\bar{N}'$ ou $\bar{N}''$, os conjuntos $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$ e X resultam todos conjuntos $\bar{\mathrm{P}}$ pertencentes a $\bar{P}$ ou seja conjuntos $\bar{\mathrm{P}}$ pertencentes à álgebra-σ $\bar{P}^{\square}$ gerada por $\bar{P}$, álgebra-σ essa que admite a subclasse $\tilde{P}$ formada pelos conjuntos $\tilde{\mathrm{P}}$ de $\bar{P}^{\square}$ com a particularidade de estarem contidos em X. Como o espaço mensurável $(\bar{\mathrm{X}}, \bar{P}^{\square})$ admite a decomposição $\bar{D} = \{\mathrm{X}, \infty\}$, concluímos, atendendo ao teorema 13, que $\bar{P}^{\square}$ se identifica com a classe das somas $\tilde{\mathrm{P}} \dotplus \bar{\mathrm{Z}}$ possíveis.

Então: a relação $\mathrm{X} \varepsilon \bar{P}^{\square}$ mostra que a recta real $\mathrm{X} \varepsilon \tilde{P}$; escolhido arbitrariamente um conjunto $\tilde{\mathrm{P}} \varepsilon \tilde{P}$, a relação $\mathrm{X} - \tilde{\mathrm{P}} = (\bar{\mathrm{X}} - \infty) - \tilde{\mathrm{P}} \varepsilon \bar{P}^{\square}$ mostra que $\mathrm{X} - \tilde{\mathrm{P}} \leqslant \mathrm{X}$ pertence a $\tilde{P}$; escolhidos arbitrariamente conjuntos $\tilde{\mathrm{P}}_n \varepsilon \tilde{P}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, a relação $\mathrm{X} \geqslant \bigvee_n \tilde{\mathrm{P}}_n \varepsilon \bar{P}^{\square}$ mostra que $\bigvee_n \tilde{\mathrm{P}}_n \varepsilon \tilde{P}$. Em suma, a classe $\tilde{P}$ é uma álgebra-σ tirada de X e é tal que $\tilde{P} \leqslant \bar{P}^{\square}$.

Posto isso, a relação óbvia $\overline{P}^{\square} \geqslant \overline{P} \geqslant M$ e a disjunção entre $\overline{P}^{\square} - \tilde{P}$ e M mostram que $\tilde{P} \geqslant M$, donde $\tilde{P} = \tilde{P}^{o} \geqslant M^{o} = B$. Daí e de $\overline{P}^{\square} \geqslant \tilde{P}$ concluímos que a álgebra-σ $\overline{P}^{\square} \geqslant B$, de modo que lhe pertencem todas as somas $\mathrm{B} \dotplus \overline{\mathrm{Z}}$ possíveis. Em suma, $\overline{A} \leqslant \overline{P}^{\square}$ ou, mais explicitamente, $\overline{A} \leqslant \overline{N}^{\square}$ [ou $\overline{N}'^{\square}$ ou $\overline{N}''^{\square}$], c. q. d.

Posto isso, recordemos que são borelianos $\overline{\mathrm{B}}$ todos os borelianos B especiais apresentados no n.º **2**. Tal não podia deixar de acontecer em face do corolário seguinte, *com enunciado um tanto repetidor em relação ao teorema* 21, *a fim de facilitar eventuais consultas do leitor*. Vejamos:

Corolário 21'. «Dadas a recta de Borel $[\mathrm{X}(\mathrm{x}),B(\mathrm{B})]$ e a correspondente recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}),\overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$, considerem-se o conjunto genérico $\overline{\mathrm{Z}} \leqslant \infty$ propriamente contido em $\overline{\mathrm{X}}$ † e a classe $\overline{A}$ formada pelas somas $\mathrm{B} \dotplus \overline{\mathrm{Z}}$ possíveis, onde se deve interpretar cada B como conjunto contido em $\overline{\mathrm{X}}$. Então, vale a relação $\overline{B} = \overline{A}$ contém propriamente B. Além disso, escolhida uma classe M geradora de B, a álgebra-σ $\overline{B}$ pode ser gerada pela classe $M \dotplus \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\}$ e, caso existam conjuntos $\mathrm{M}_{\mathrm{n}} \varepsilon M$ $(\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots)$ com união igual a X, a álgebra-σ $\overline{B}$ pode ser gerada também por cada uma das classes $M \dotplus \{\{-\infty\}\}$ e $M \dotplus \{\{+\infty\}\}$.»

Demonstração. Se tomarmos em conta o teorema 21, a única coisa a provar é a igualdade $\overline{B} = \overline{A}$. Para o efeito, vamos recordar o semianel G [ou $\overline{G}$], formado pelos intervalos principais G [ou $\overline{G}$] contidos em X [ou $\overline{\mathrm{X}}$], semianel este que sabemos ser gerador de B [ou $\overline{B}$]. Ora, como cada intervalo

$$\{-\mathrm{n} \leqslant x < \mathrm{n}\} = \mathrm{G}_{\mathrm{n}} \varepsilon G \; (\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots)$$

e como $\underset{\mathrm{n}}{V} \mathrm{G}_{\mathrm{n}} = \mathrm{X}$, concluímos do teorema 21 que $G \dotplus \{\{-\infty\}\} = \overline{H}$ é uma classe geradora de $\overline{A}$. Como qualquer conjunto $\overline{\mathrm{G}}$ pertencente a $\overline{G}$ e exterior a G (propriamente contido em $\overline{G}$) †† é

† Talvez convenha recordar a definição $\infty = \{-\infty, +\infty\}$.

†† Note-se que $G \leqslant \overline{G}$ não confere evidência imediata a $B = G^{o} \leqslant \overline{G}^{\square} = \overline{B}$.

um conjunto da forma

$$\{-\infty \leqslant x < b\} = \underset{n}{V}\{-n \leqslant x < b\} \dot{+} \{-\infty\},$$

com b finito e arbitrário, concluímos que $\overline{G} \leqslant \overline{H}^{\square}$, donde $\overline{B} = \overline{G}^{\square} \leqslant \overline{H}^{\square} = \overline{A}$. Por outro lado, como o único conjunto $\overline{\text{H}}$ pertencente a $\overline{H}$ e exterior a $\overline{G}$ é o conjunto elementar $\{-\infty\}$ $\varepsilon\overline{G}^{\square} = \overline{B}$, concluímos que $\overline{H} \leqslant \overline{B}$, donde $\overline{A} = \overline{H}^{\square} \leqslant \overline{B}^{\square} = \overline{B}$. Em suma, vale a relação $\overline{B} \leqslant \overline{A} \leqslant \overline{B}$ e está assim concluída a nossa demonstração.

Observação. O corolário 21' mostra não só que todo o boreliano B é também um boreliano $\overline{\text{B}}$, como também que a classe dos borelianos $\overline{\text{B}}$ coincide com a classe das somas $\text{B} \dot{+} \overline{\text{Z}}$ possíveis onde, não se esqueça, $\overline{\text{Z}}$ representa o subconjunto genérico de ∞. Daí uma definição alternativa para a álgebra de Borel alargada $\overline{B}$, definição essa que não envolve declaradamente nenhuma classe geradora de $\overline{B}$, mas que obriga a passar por B para alcançar $\overline{B}$. Enfim, vantagens e inconvenientes, apesar perante as circunstâncias. Acrescentemos que talvez valha a pena pensar na *álgebra de Borel semialargada,* que se obtém quando se substitui a recta real X pela correspondente recta real semialargada $\overleftrightarrow{\text{X}} = \text{X} \dot{+} \{\infty\}$, onde se interpreta ∞ como um ponto ou número e não como o conjunto formado pelos dois números $-\infty$ e $+\infty$.

OPERAÇÕES EXTERNAS

§ 15 — RESTRIÇÃO DUMA ÁLGEBRA-σ A UM SUBESPAÇO

1. Generalidades

Dados um espaço Ω ou $\Omega(\omega)$, uma classe não-vazia K ou $K(\mathrm{K})$ formada por conjuntos $\mathrm{K} \leqslant \Omega$ e um conjunto não-vazio Ω' ou $\Omega'(\omega')$ que possa instituir-se em subespaço de Ω, vamos, por um lado, representar pelo símbolo K/Ω' a classe formada por todas as restrições K/Ω' tais que $\mathrm{K}\varepsilon K$ e vamos, por outro lado, chamar a essa classe *restrição de K a* Ω' e também (*classe*) *K dado* Ω' ou *sob a condição* Ω' ou ainda *na hipótese* Ω'. No que concerne a *restrição de K a* Ω', *será cumulativamente a operação que converte K em* K/Ω'.

Reveste-se de interesse especial o caso em que a classe $K(\mathrm{K})$ proposta é uma álgebra-σ $A(\mathrm{A})$ tirada de Ω, caso este em que temos o

Teorema 22. «Dados um espaço Ω e um seu subespaço Ω/Ω', então a restrição a Ω' de qualquer álgebra-σ tirada de Ω resulta uma nova álgebra-σ tirada de Ω/Ω'.»

Demonstração. Escolha-se arbitrariamente uma álgebra-σ $A(\mathrm{A})$ tirada de Ω e tenha-se em mente o teorema 10. Como $O\varepsilon A$, obtemos $O/\Omega'\varepsilon A/\Omega'$ ou seja uma (classe) restrição não-vazia. Por outro lado, se $\mathrm{A}/\Omega'\varepsilon A/\Omega'$, com $\mathrm{A}\varepsilon A$, então a fórmula 26c) dá $(\mathrm{A}/\Omega')^- = \mathrm{A}^-/\Omega'\varepsilon A/\Omega'$ e, se $\mathrm{A}_n/\Omega'\varepsilon A/\Omega'$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, com $\mathrm{A}_n\varepsilon A$ para cada n, então a fórmula 27b) dá $\underset{n}{V}(\mathrm{A}_n/\Omega') = (\underset{n}{V}\mathrm{A}_n)/\Omega'\varepsilon A/\Omega'$. Concluímos assim que a classe A/Ω' satisfaz à definição duma álgebra-σ tirada de Ω/Ω', c. q. d.

Observação. Se partirmos de conjuntos contidos em Ω, sabemos, pelas fórmulas 26) e 27), que é indiferente ou aplicar primeiro certas operações internas usuais e restringir depois a Ω' ou restringir primeiro a Ω' e aplicar depois as operações em causa (agora tomadas no subespaço). Nesta conformidade, qualquer classe não-vazia, tirada de Ω e fechada com respeito a certas operações internas usuais é uma classe que tem restrição a Ω' não-vazia e fechada com respeito às operações em causa (agora tomadas no subespaço); isto porque, na incidência, o resultado das operações sobre restrições de conjuntos da classe original coincide com a restrição do resultado das operações sobre os próprios conjuntos e é assim a restrição dum conjunto da classe original, pertencendo como tal à restrição da classe original. Foi este esquema que se utilizou na demonstração do teorema 22 e é o mesmo esquema que cobre uma vasta gama de casos. Por exemplo, a restrição dum anel [ou anel-σ ou álgebra] tirado de Ω é um anel [ou anel-σ ou álgebra] tirado de Ω/Ω'.

Dados um espaço Ω e um seu subespaço Ω/Ω', o teorema 22 faz corresponder a qualquer espaço mensurável (Ω,A) um novo espaço mensurável $(\Omega/\Omega',A/\Omega')$ ou, em notação mais sucinta, $(\Omega,A)/\Omega'$, a que vamos chamar *restrição de* (Ω,A) *a* Ω' e também (*espaço mensurável*) (Ω,A) *dado* Ω' ou *sob a condição* Ω' ou ainda *na hipótese* Ω'. No que concerne à *restrição de* (Ω,A) *a* Ω', *será cumulativamente a operação que converte* (Ω,A) *em* $(\Omega,A)/\Omega'$. Note-se que *não se pede* $\Omega' \varepsilon A$, pedido este que pode revelar-se útil em casos especiais.

Exemplo 52. Dado o espaço $\Omega = \{1,2,3,4\}$, o corolário 18' mostra que a classe $A = \{O,\Omega,\{1,2,3\}\}$ não pode ser nenhuma álgebra-σ. Todavia, se tomarmos o subespaço $\Omega/\Omega' = \{1,2\}$, a classe A/Ω' será a respectiva álgebra-σ mínima. Este exemplo mostra que *a restrição* A/Ω' *pode ser uma álgebra-σ tirada de* Ω/Ω' *sem que a classe original A seja uma álgebra-σ tirada de* Ω.

Exercício 52. Prove que a restrição de classes a um subespaço fixo não é uma operação univalente, dando um exemplo em que classes originais diferentes conduzam a restrições iguais num subespaço apropriadamente escolhido.

2. Assimetria entre um espaço e as suas restrições

O confronto entre o teorema 22 e o exemplo 52 aponta para uma *assimetria notória no relacionamento entre as álgebras-σ tiradas de Ω e as tiradas de Ω/Ω'*. Neste contexto tem interesse o seguinte

Teorema 23. «Considerem-se um espaço Ω e conjuntos não-vazios $\Omega_n \leqslant \Omega (n = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois e com soma igual a Ω. Se interpretarmos cada Ω_n como um espaço, se instituirmos no espaço incidente número n uma álgebra-σ $\mathcal{A}_n$ de conjunto genérico $A_n \leqslant \Omega_n$ e se, em seguida, reinterpretarmos todo o A_n como um conjunto contido em Ω, então a classe formada pelas somas $\dot{\sum_n} A_n = S$ possíveis resulta uma álgebra-σ $\mathcal{S}$ tirada de Ω a que pertencerão todos os Ω_n e que, escolhido arbitrariamente o valor de n, torna um conjunto pertencente à restrição $\mathcal{S}/\Omega_n$ se e só se ele for um conjunto A_n da álgebra-σ $\mathcal{A}_n$.»

Demonstração. No decurso da prova recorreremos várias vezes ao teorema 10.

a) Para já, a classe $\mathcal{S}$ é não-vazia por lhe pertencer a soma dos vazios dos espaços Ω_n, soma essa que vai coincidir com o vazio contido em Ω. — Em seguida, escolhida arbitrariamente uma soma $S = \dot{\sum_n} A_n \varepsilon \mathcal{S} (n = 1, 2, 3, \ldots)$, onde cada $A_n \leqslant \Omega_n$ pertence a $\mathcal{A}_n$ e é reinterpretado como conjunto contido em Ω, feito isso, a fórmula 13") e as propriedades da adição permitem escrever

$$\Omega = \dot{\sum_n} \Omega_n = \dot{\sum_n} [A_n \dot{+} (\Omega_n - A_n)] = [\dot{\sum_n} A_n] \dot{+} [\dot{\sum_n} (\Omega_n - A_n)],$$

de modo que a fórmula 18) conduz à igualdade $\Omega - S = \dot{\sum_n} (\Omega_n - A_n)$, onde cada parcela $\Omega_n - A_n \leqslant \Omega_n$ pertence à álgebra-σ $\mathcal{A}_n$ e é reinterpretada como conjunto contido em Ω. Concluímos assim que o complemento $S^- = \Omega - S$ pertence à classe $\mathcal{S}$. — Posto isso, se fizermos passar p por valores 1, 2, 3, ... e se fizermos corresponder a cada valor p admissível um conjunto $S_p \varepsilon \mathcal{S}$, então $S_p = \dot{\sum_n} A_{n,p} (p = 1, 2, 3, \ldots)$ onde, fixado o valor de p, cada

$A_{n,p} \leqslant \Omega_n$ pertence a $\mathcal{A}_n$ e é reinterpretado como conjunto contido em Ω. Nesta conformidade, as propriedades da adição e da união, a nota à fórmula 16) e a 1.ª propriedade do n.º **4** do § 2 fazem com que $\overset{V}{_p} S_p = \overset{V}{_p} (\dot{\sum_n} A_{n,p}) = \dot{\sum_n} (\overset{V}{_p} A_{n,p})$, onde cada parcela $\overset{V}{_p} A_{n,p} \leqslant \Omega_n$ pertence à álgebra-σ $\mathcal{A}_n$ e é reinterpretada como conjunto contido em Ω. Concluímos que a união $\overset{V}{_p} S_p$ pertence à classe $\mathcal{S}$, classe esta que assim cumpre com todas as condições exigidas na definição duma álgebra-σ tirada de Ω.

b) Acabamos de provar a parte principal da tese e vamos passar para as partes complementares. — Escolhido arbitrariamente um valor particular m para o índice n, tem-se

$\Omega_m = \dot{\sum_n} A_n$ desde que

se tome $A_m = \Omega_m$ e $A_n = O$ para $n \neq m$.

Logo $\Omega_n \varepsilon \mathcal{S}$ para qualquer n. — Por outro lado, escolhido arbitrariamente o valor de n, a restrição $\mathcal{S}/\Omega_n$ comporta todos os conjuntos $S/\Omega_n \leqslant \Omega/\Omega_n$ os quais, atendendo à definição de restrição dum conjunto a um subespaço, vão ser interpretados como conjuntos $S \wedge \Omega_n$ contidos no espaço Ω_n e, eventualmente, reinterpretados como conjuntos $S \wedge \Omega_n$ contidos no espaço Ω. Então, basta redesignar por p o índice de

$\dot{\sum_n} A_n$ para obter $S \wedge \Omega_n = (\dot{\sum_p} A_p) \wedge \Omega_n = \dot{\sum_p} (A_p \wedge \Omega_n)$

onde, seja qual for p, vale $\Omega_p \geqslant A_p$, de modo que a disjunção dois a dois dos Ω_p acarreta a relação $S \wedge \Omega_n = A_n \leqslant \Omega_n$. Esta relação colhe para cada valor de n e, escolhido n, para cada conjunto $A_n \varepsilon \mathcal{A}_n$ que se queira fazer corresponder à parcela número n de S. Fica assim concluída a nossa demonstração.

Exemplo 53. Supondo que Ω e Ω_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ têm os significados referidos no enunciado do teorema 23, consideremos uma classe $\mathcal{A}$ tirada de Ω tal que cada uma das restrições $\mathcal{A}/\Omega_n$ seja uma álgebra-σ tirada do respectivo subespaço Ω/Ω_n. Então, seja qual for n, a interpretação de Ω_n como espaço e a interpretação do conjunto genérico $A/\Omega_n \varepsilon \mathcal{A}/\Omega_n$ como conjunto $A_n \leqslant \Omega_n$ são interpretações que conduzem a uma álgebra-σ $\mathcal{A}_n$, de conjunto genérico A_n e tirada do espaço Ω_n. — Se agora reinterpretarmos os diversos conjuntos A_n como conjuntos contidos em Ω, vamos cair na álgebra-σ S do teorema 23 ou seja na classe formada pelas somas $\dot{\sum\limits_n} A_n = S$ possíveis. Nesta conformidade, *é fácil reconhecer que S é uma sobreclasse de A.* Com efeito: escolhido arbitrariamente um conjunto $A \varepsilon \mathcal{A}$, tem-se $A = A \wedge (\dot{\sum\limits_n} \Omega_n) = \dot{\sum\limits_n} (A \wedge \Omega_n)$ onde, seja qual for n, o conjunto $A \wedge \Omega_n \leqslant \Omega_n$ pode ser interpretado como conjunto $A_n \varepsilon \mathcal{A}_n$ e, por isso, pode ser reinterpretado como parcela $A_n \leqslant \Omega$ de somas S. — Mas seria prematuro pensar que a assimetria apontada na introdução a este n.º possa ceder na hipótese de se recorrer a um relacionamento melhorado entre, por um lado, álgebras-σ tiradas dos diversos subespaços Ω/Ω_n e tomadas em bloco e, por outro lado, álgebras-σ tiradas de Ω e reforçadas pelo pedido de lhes pertencerem todos os Ω_n. Vejamos o contra-exemplo em que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \ \Omega_1 = \{1, 2\}, \ \Omega_2 = \{3, 4\}$$

e a classe

$$\mathcal{A} = \{O, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\},$$

eventualmente proponível para álgebra-σ tirada de Ω (por lhe pertencerem O e Ω e por comportar conjuntos em número igual a uma potência perfeita de 2). Embora $\mathcal{A}/\Omega_1$ e $\mathcal{A}/\Omega_2$ sejam álgebras-σ (máximas) nos respectivos subespaços e embora Ω_1 e Ω_2 pertençam à classe $\mathcal{A}$, esta deixa de ser uma álgebra-σ tirada de Ω porque lhe falta, por exemplo, o conjunto $\{2,3\} = \{2\} \dotplus \{3\}$.

Exercício 53. Dados o espaço $\Omega = \{1,2,3,4\}$, os conjuntos $\Omega_1 = \{1, 2\}$ e $\Omega_2 = \{3, 4\}$ e a classe $\mathcal{A} = \{O, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ tirada de Ω, então o exemplo 41 institui $\mathcal{A}$ em álgebra-σ e o teorema 22 institui as restrições $\mathcal{A}/\Omega_1$ e $\mathcal{A}/\Omega_2$ em álgebras-σ, tiradas respectivamente de Ω/Ω_1 e de Ω/Ω_2, classes essas que vamos interpretar como álgebras-σ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, tiradas dos espaços respectivamente Ω_1 e

Ω_2. Posto isso, mostre que a correspondente álgebra-σ S, referida no enunciado do teorema 23, é uma *sobreclasse própria de A, isto apesar de A se constituir em álgebra-σ* tirada de Ω (uma particularização das hipóteses admitidas no início do exemplo 53).

3. Passagem de decomposições

Por fim, vamos examinar como as decomposições de espaços mensuráveis acompanham a passagem dum dado espaço mensurável para qualquer uma das suas restrições a um subespaço. Neste contexto, temos o

Teorema 24. «Considerem-se o espaço Ω, um conjunto não-vazio $\Omega' \leqslant \Omega$ e uma álgebra-σ A tirada de Ω. Se D for uma decomposição [ou decomposição irredutível] do espaço mensurável (Ω,A), então a classe D/Ω' desembaraçada dos seus eventuais conjuntos vazios resulta uma decomposição [ou decomposição irredutível] da restrição $(\Omega,A)/\Omega'$.»

Demonstração. Sendo $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ uma decomposição de (Ω,A), sabe-se que $A_n \varepsilon A$ para cada n e tem-se a igualdade de definição $D/\Omega' = \{A_1/\Omega', A_2/\Omega', \dots, A_n/\Omega', \dots\}$, onde $A_n/\Omega' \varepsilon A/\Omega'$ para cada n. Como os A_n são não-vazios, disjuntos dois a dois e tais que $\dot{\sum\limits_n} A_n = \Omega$, a fórmula 27c) dá $\Omega/\Omega' = \dot{\sum\limits_n} (A_n/\Omega')$; logo a classe D'/Ω', obtida a partir de D/Ω' por supressão dos eventuais conjuntos vazios, cumpre com o exigido na definição de decomposição do espaço mensurável $(\Omega/\Omega', A/\Omega') = (\Omega,A)/\Omega'$. Está assim demonstrada a primeira versão do enunciado e falta apenas considerar a hipótese da irredutibilidade da decomposição original D.

Posto isso, suponhamos que D é irredutível e que D'/Ω' é redutível, caso este em que existirá um conjunto A/Ω', com $A \varepsilon A$, tal que O/Ω' propriamente contido em A/Ω' propriamente contido em A_m/Ω', onde m designa um valor particular do índice n. Então, a fórmula 27a) dará $A/\Omega' = (A/\Omega') \Delta (A_m/\Omega') = (A \Delta A_m)/\Omega'$ e a irredutibilidade de D imporá uma das igualdades $A \Delta A_m = O$ ou $A \Delta A_m = A_m$, a primeira conducente a $A/\Omega' = O/\Omega'$ e a outra conducente a $A/\Omega' = A_m/\Omega'$. Em suma, a outra versão do enunciado fica provada por redução ao absurdo.

Exemplo 54. Mesmo que a classe D do enunciado do teorema 24 seja uma decomposição redutível de (Ω,A), a classe D'/Ω' formada pelos conjuntos não-vazios de D/Ω' pode resultar em decomposição irredutível da restrição $(\Omega,A)/\Omega'$. É o que acontece quando se trabalha com a recta de Borel, quando se toma o conjunto formado pelos números inteiros e pares para subespaço da recta real subjacente, quando se atende à asserção feita no exemplo 49 e quando se escolhe a decomposição de partida formada pelos intervalos principais $\{k \leqslant x < k+1\}$, com k a percorrer todos os números inteiros.

Exercício 54. Dados a recta de Borel (X,B) [eventualmente alargada $(\overline{X},\overline{B})$] e os conjuntos X_1 e X_2, o primeiro formado pelos números x racionais e o outro formado pelos restantes números x reais, proceda à análise comparativa, nos termos deste parágrafo, entre a álgebra-σ B [ou $\overline{B}$] tirada de X [ou $\overline{X}$], as suas restrições a X_1 e a X_2, as interpretações dessas restrições como classes tiradas dos espaços X_1 e X_2 e ainda a classe S referida no enunciado do teorema 23.

§ 16 — CORTE FEITO NUMA CLASSE POR UM PONTO

1. Generalidades

Retomemos o espaço-produto $\Omega(\omega) = \underset{t \epsilon T}{\times} \Omega_t(\omega_t)$ dos n.os 1 do § 8 e do § 9, onde $\omega = (\omega_t, t \varepsilon T)$ e onde se supõe escolhido um dispositivo de entrada para as (pelo menos duas) determinações do índice genérico t da família T; em seguida, cindamos esta família em duas subfamílias $T^*(t^*)$ e $T^{**}(t^{**})$, disjuntas entre si e com dispositivos de entrada para as determinações de t^* e de t^{**} herdadas do dispositivo geral supracitado; por fim, consideremos os espaços-produtos parciais

$$\Omega^*(\omega^*) = \underset{t^* \epsilon T^*}{\times} \Omega_{t^*}(\omega_{t^*})$$

e

$$\Omega^{**}(\omega^{**}) = \underset{t^{**} \epsilon T^{**}}{\times} \Omega_{t^{**}}(\omega_{t^{**}})$$

da fórmula 38), o primeiro caracterizado por $t = t^*$ ou $t \neq t^{**}$ e o outro caracterizado por $t = t^{**}$ ou $t \neq t^*$, marginais de Ω cada um em relação ao outro e com pontos genéricos respectivamente

$$\omega^* = (\omega_{t^*}, t^* \varepsilon T^*)$$

e

$$\omega^{**} = (\omega_{t^{**}}, t^{**} \varepsilon T^{**}).$$

Então, escolhidos arbitrariamente um ponto $\bar{\omega}^* = (\bar{\omega}_{t*}, t^* \varepsilon T^*) \varepsilon \Omega^*$ e uma classe não-vazia K ou $K(\mathrm{K})$ formada por conjuntos $\mathrm{K} \leqslant \Omega$, não só vamos representar pelo símbolo $K/\bar{\omega}^*$ a classe formada por todos os cortes $\mathrm{K}/\bar{\omega}^* \leqslant \Omega^{**}$ tais que $\mathrm{K} \varepsilon K$, como também vamos chamar a essa classe *corte (feito) na classe K pelo ponto* $\bar{\omega}^*$, designação esta que atribuímos também à operação que converte K em $K/\bar{\omega}^*$. Quanto a K, será a *classe cortada* e, quanto a $\bar{\omega}^*$, será o *ponto cortante*. Tendo em mente a propriedade referida a seguir à justificação da fórmula 48), podemos afirmar que a nossa operação de corte (global) de K pode resolver-se em *operações de corte (parciais), associativas e comutativas,* nos mesmos moldes que se aplicam ao conjunto genérico $\mathrm{K} \varepsilon K$.

Exemplo 55. Dado o espaço $\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$, igual ao produto dos espaços $\Omega_1 = \{1,2\}$ e $\Omega_2 = \{1,2\}$, então o ponto $2_1 = 2 \varepsilon \Omega_1$ corta a classe $K = \{O, \Omega, \{(1,2), (2,1), (2,2)\}\}$, tirada de Ω, segundo a classe $K/2_1 = \{O_2, \Omega_2\}$, tirada de Ω_2 e coincidente com a respectiva álgebra-σ mínima. Isto apesar de K não poder ser nenhuma álgebra-σ, em virtude do corolário 18'.

Exercício 55. Prove que a operação de corte feito em classes por um ponto fixo não é uma operação univalente, dando um exemplo de classes originais distintas entre si que conduzam a cortes iguais por recurso a um ponto cortante comum apropriadamente escolhido.

2. **Corte numa álgebra-σ**

Reveste-se de interesse especial o caso em que a classe $K(\mathrm{K})$ proposta é uma álgebra-σ $A(\mathrm{A})$ tirada de Ω, caso este em que temos o

Teorema 25. «Considerem-se um espaço-produto Ω, dois espaços Ω^* e Ω^{**} que sejam marginais de Ω cada um em relação ao outro e, por fim, um ponto cortante $\bar{\omega}^*$, arbitrariamente escolhido em Ω^*. Então, qualquer álgebra-σ tirada de Ω é cortada por $\bar{\omega}^*$ segundo uma álgebra-σ tirada de Ω^{**}.»

Demonstração. Escolha-se arbitrariamente uma álgebra-σ A(A) tirada de Ω e tenha-se em mente o teorema 10. Como existem conjuntos pertencentes a A, é óbvio que o corte $A/\bar{\omega}^*$ resulta não-vazio. Por outro lado, se $A/\bar{\omega}^* \varepsilon A/\bar{\omega}^*$, com $A \varepsilon A$, então a fórmula 50a) dá $(A/\bar{\omega}^*)^- = (A^-)/\bar{\omega}^* \varepsilon A/\bar{\omega}^*$ e, se $A_n/\bar{\omega}^* \varepsilon A/\bar{\omega}^*$ $(n = 1,2,3,\ldots)$, com $A_n \varepsilon A$ para cada n, então a fórmula 50b) dá $\underset{n}{V}(A_n/\bar{\omega}^*) = (\underset{n}{V} A_n)/\bar{\omega}^* \varepsilon A/\bar{\omega}^*$. Concluímos assim que o corte $A/\bar{\omega}^*$ satisfaz à definição de álgebra-σ tirada de Ω^{**}, c. q. d.

Observação. As considerações produzidas na observação posta a seguir ao teorema 22 adaptam-se à operação de corte feito numa classe por um ponto dado, bastando para o efeito, substituir o recurso às fórmulas 26) e 27) pelo recurso à fórmula 50), o subespaço Ω/Ω' pelo espaço marginal Ω^{**} e qualquer restrição pelo corte adequado. Nesta conformidade, qualquer classe não-vazia, tirada de Ω e fechada com respeito a certas operações internas usuais, é cortada pelo ponto $\bar{\omega}^*$ segundo uma classe não-vazia e fechada com respeito às operações em causa (agora tomadas em Ω^{**}). Claro que este resultado se aplica a anéis, a anéis-σ e a álgebras.

Dados os espaços Ω, Ω^* e Ω^{**} e o ponto $\bar{\omega}^*$ aqui introduzidos, o teorema 25 e a fórmula 49a) fazem corresponder a qualquer espaço mensurável (Ω,A) um novo espaço mensurável $(\Omega^{**},A/\bar{\omega}^*) = (\Omega/\bar{\omega}^*,A/\bar{\omega}^*)$ ou, em notação mais sucinta, $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, a que vamos chamar *corte (feito) em* (Ω,A) *pelo ponto* $\bar{\omega}^*$, designação esta que atribuímos também à conversão de (Ω,A) em $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$ (com *ponto cortante* $\bar{\omega}^*$ e com *espaço mensurável cortado* (Ω,A) em qualquer dos casos). Também aqui a operação de corte global pode resolver-se em operações de corte parciais, associativas e comutativas, já que o procedimento é aplicável a Ω e a cada $A \varepsilon A$.

Exercício 56. Retome as condições do teorema 25 e mostre que qualquer ponto $\bar{\omega}^* \varepsilon \Omega^*$ corta a álgebra-σ mínima [ou máxima] tirada de Ω segundo a álgebra-σ mínima [ou máxima] tirada de Ω^{**}. *Sugestão:* Recorra ao resultado 48) ou então ao exemplo 26 e ao resultado 42b).

3. Passagem de decomposições

Posto isso, vamos examinar como as decomposições de espaços mensuráveis acompanham a passagem de um espaço mensurável dado para qualquer um dos seus cortes. Neste contexto, temos o

Teorema 26. «Considerem-se um espaço-produto Ω, dois espaços Ω^* e Ω^{**} marginais de Ω cada um em relação ao outro, um ponto cortante $\bar{\omega}^* \varepsilon \Omega^*$ e ainda uma álgebra-σ A tirada de Ω. Se D for uma decomposição [ou decomposição irredutível] do espaço mensurável (Ω,A), então o corte $D/\bar{\omega}^*$ desembaraçado dos seus eventuais conjuntos vazios resulta uma decomposição [ou decomposição irredutível] do novo espaço mensurável $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$.»

Demonstração. Sendo $D = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ uma decomposição de (Ω,A), sabe-se que $A_n \varepsilon A$ para cada n e tem-se $D/\bar{\omega}^* = \{A_1/\bar{\omega}^*, A_2/\bar{\omega}^*, \ldots, A_n/\bar{\omega}^*, \ldots\}$, onde $A_n/\bar{\omega}^* \varepsilon A/\bar{\omega}^*$ para cada n. Como os A_n são não-vazios, disjuntos dois a dois e tais que $\dot{\sum_n} A_n = \Omega$, as fórmulas 49a) e 50b) dão $\Omega^{**} = \Omega/\bar{\omega}^* = \dot{\sum_n} (A_n/\bar{\omega}^*)$ e logo a classe $D^{**}/\bar{\omega}^*$, obtida a partir de $D/\bar{\omega}^*$ por supressão dos eventuais conjuntos vazios, é uma classe que cumpre com o exigido na definição de decomposição do espaço mensurável $(\Omega/\bar{\omega}^*, A/\bar{\omega}^*) = (\Omega,A)/\bar{\omega}^*$. Está assim justificada a primeira versão do enunciado e só falta considerar o caso da irredutibilidade de D.

Posto isso, suponhamos que D é irredutível e que $D^{**}/\bar{\omega}^*$ é redutível, caso este em que existirá um conjunto $A/\bar{\omega}^*$, com $A \varepsilon A$, tal que $O/\bar{\omega}^*$ propriamente contido em $A/\bar{\omega}^*$ propriamente contido em $A_m/\bar{\omega}^*$ para algum valor particular m do índice n. Então, não só a fórmula 50c) dará $A/\bar{\omega}^* = (A/\bar{\omega}^*) \wedge (A_m/\bar{\omega}^*) = (A \wedge A_m)/\bar{\omega}^*$, como também a irredutibilidade de D imporá uma das igualdades $A \wedge A_m = O$ ou $A \wedge A_m = A_m$, a primeira conducente a $A/\bar{\omega}^* = O/\bar{\omega}^*$ e a outra conducente a $A/\bar{\omega}^* = A_m/\bar{\omega}^*$. Assim a alternativa do enunciado está provada por redução ao absurdo.

Exemplo 56. Mesmo que a classe D do enunciado do teorema 26 seja uma decomposição redutível de (Ω,A), a classe $D^{**}/\bar{\omega}^{*}$, formada pelos conjuntos não-vazios de $D/\bar{\omega}^{*}$, pode resultar em decomposição irredutível do corte $(\Omega,A)/\bar{\omega}^{*}$. É o que acontece quando se trabalha com o espaço-produto e o ponto cortante do exemplo 55, quando se escolhe para A a álgebra-σ máxima tirada de Ω e quando se toma a decomposição redutível D de (Ω,A) formada pelos dois conjuntos $\{(1,1), (2,2)\}$ e $\{(1,2), (2,1)\}$. Com efeito, não só $A/2_1$ vai coincidir com a álgebra-σ máxima tirada de Ω_2, como também $D^{**}/2_1$ vai coincidir com a classe $\{\{1\}, \{2\}\}$ tirada de Ω_2 ou seja com a decomposição irredutível de $(\Omega,A)/2_1$.

§ 17 — PROJECÇÃO E MARGINAÇÃO DE CLASSES

1. Generalidades

Retomemos os espaços Ω, Ω^* e Ω^{**} dos n.os 1 do § 8 e do § 16. Então, escolhida arbitrariamente uma classe (eventualmente vazia) K ou $K(\mathrm{K})$ formada por conjuntos $\mathrm{K} \leqslant \Omega$, vamos representar pelo símbolo K^* a classe que é vazia se K o for e que, nos demais casos, é formada por todas as projecções K^* de conjuntos $\mathrm{K} \varepsilon K$ sobre Ω^* e/ou segundo a direcção de Ω^{**}. Nesta conformidade, vamos chamar *projecção de K sobre Ω^* e/ou segundo a direcção de Ω^{**}* tanto à classe K^*, como também à transformação de K em K^*. Quanto a K, será a *classe projectada.*

Posto isso, seja $C(K) \leqslant K$ a classe formada pelos conjuntos $\mathrm{K} \varepsilon K$ que tenham a particularidade de serem cilindros $\mathrm{C}(K)$ com base (contida) em Ω^* e/ou com geratrizes paralelas a Ω^{**}. A $C(K)$ vamos chamar *subclasse cilíndrica* de K e vamos fazer corresponder a nova projecção $C^*(K) \leqslant K^*$, esta formada pelos conjuntos marginais ou bases $\mathrm{C}^*(K)$ dos cilindros $\mathrm{C}(K)$. À classe $C^*(K)$ vamos chamar *classe marginal* ou *base de K em Ω^**, esta obtida por *marginação de K com respeito a Ω^{**}.*

De acordo com as considerações produzidas a seguir à fórmula 39) e com a sua particularização feita no exemplo 21, a projecção de qualquer $\mathrm{K} \varepsilon K$ sobre Ω^* e a marginação de qualquer $\mathrm{C}(K) \varepsilon C(K)$ com respeito a Ω^{**} podem resolver-se em *operações parciais do mesmo teor que são associativas e comutativas,* propriedade esta que se transmite obviamente à projecção de K sobre Ω^* e à marginação de K com respeito a Ω^{**}, esta redutível à marginação de $C(K)$ com respeito a Ω^{**}.

Exemplo 57. Retomemos a classe $K = \{O, \Omega, \{(1,1\}^-\}$ do exemplo 55, a qual não é álgebra-σ tirada do respectivo espaço Ω e, todavia, tem projecção $K^* = K_1$ sobre $\Omega^* = \Omega_1$ igual à classe $\{O_1, \Omega_1\}$ ou seja igual à álgebra-σ mínima tirada de Ω_1. Caso queiramos substituir K por $K' = K - \{O\}$, então K' não é álgebra-σ tirada de Ω nem $K'_1 = \{\Omega_1\}$ é álgebra-σ tirada de Ω_1.

Exercício 57. Prove que a operação de projecção [ou marginação] de classes não é uma operação univalente, dando um exemplo de classes tiradas de Ω que sejam distintas e que conduzam a projecções sobre [ou bases em] Ω^* iguais entre si.

2. **O caso especial das álgebras-σ**

Reveste-se de interesse especial o caso em que a classe $K(\mathrm{K})$ é uma álgebra-σ $A(\mathrm{A})$ tirada de Ω. *Neste caso, além de O^* e Ω^* figurarem entre os conjuntos da classe A^*, esta resulta fechada com respeito à união intransnumerável* em virtude de $\mathrm{A}^*_\mathrm{n} \varepsilon A^*$ ($\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots$), com cada A^*_n igual à projecção sobre Ω^* dum conjunto $\mathrm{A}_\mathrm{n} \varepsilon A$, implicar, atendendo à fórmula 40c) e ao teorema 10, a relação $\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}} \mathrm{A}^*_\mathrm{n} = (\overset{V}{\underset{\mathrm{n}}{}} \mathrm{A}_\mathrm{n})^* \varepsilon A^*$. Todavia, em geral A^* não é nenhuma álgebra-σ tirada de Ω^* porque, escolhido arbitrariamente um conjunto $\mathrm{A}^* \varepsilon A^*$, a relação $(\mathrm{A}^*)^- \varepsilon A^*$ pode falhar. É o que acontece, por exemplo, quando se trabalha com o espaço $\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ igual ao produto dos espaços $\Omega_1 = \{1,2\}$ e $\Omega_2 = \{1,2\}$, quando se toma aí a álgebra-σ $A = \{O, \Omega, \{(1,1)\}, \{(1,1)\}^-\}$ e quando se escolhe $\Omega^* = \Omega_2$, caso este em que $A^* = A_2$ é a classe $\{O_2, \{1\}, \Omega_2\}$ tirada de Ω_2, a qual não é nenhuma álgebra-σ porque falha a relação $\{1\}^- \varepsilon A_2$.

A irregularidade relativa aos complementos dos conjuntos pertencentes a A^* pode ser contornada desde que substituamos a projecção da álgebra-σ A sobre Ω^* pela marginação de A com respeito a Ω^{**}, quer dizer pela projecção sobre Ω^* ou marginação com respeito a Ω^{**} a incidir sobre a subclasse cilíndrica $C(A)$.

Para começar, temos o

Teorema 27. «Quando é dado o espaço-produto Ω com o mínimo de dois factores e quando se pretende projectar sobre o espaço marginal Ω^*, então, seja qual for a álgebra-σ A tirada de Ω, a sua subclasse cilíndrica $C(A)$ resulta, por sua vez, uma álgebra-σ tirada de Ω.»

Demonstração. Vamos designar por $\mathrm{C}(A)$ o conjunto genérico de $C(A)$ e vamos recorrer várias vezes ao teorema 10 e ao corolário 8'.

Para começar, a subclasse cilíndrica é não-vazia porque lhe pertencem os conjuntos O e Ω. Em seguida, escolhido arbitrariamente um conjunto $\mathrm{C}(A)\varepsilon C(A)$, então $\mathrm{C}^-(A)$ é um cilindro e ocorrem as relações $\mathrm{C}(A)\varepsilon A$ e $\mathrm{C}^-(A)\varepsilon A$, donde concluímos que $\mathrm{C}^-(A)\varepsilon C(A)$.

Por fim, escolhidos arbitrariamente conjuntos $\mathrm{C_n}(A)\varepsilon C(A)$ $(\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots)$, então $\underset{\mathrm{n}}{V}\,\mathrm{C_n}(A)$ é um cilindro e ocorrem as relações $\mathrm{C_n}(A)\varepsilon A$ (para qualquer n) e $\underset{\mathrm{n}}{V}\,\mathrm{C_n}(A)\varepsilon A$, donde concluímos que $\underset{\mathrm{n}}{V}\,\mathrm{C_n}(A)\varepsilon C(A)$. Em suma, a classe $C(A)$ cumpre com a definição de álgebra-σ tirada de Ω, c. q. d.

Uma consequência importante do teorema 27 é o

Corolário 27'. «Admitidas as hipóteses do teorema 27, qualquer álgebra-σ A tirada de Ω tem uma base $C^*(A)$ que é outra álgebra-σ, esta tirada de Ω^*.»

Demonstração. Como o teorema 27 institui $C(A)$ em álgebra-σ tirada de Ω, a correspondente projecção ou base $C^*(A)$ resulta não-vazia e fechada com respeito à união intransnumerável (veja-se o texto introdutório deste número). Por outro lado, escolhido arbitrariamente um conjunto $\mathrm{C}^*(A)\varepsilon C^*(A)$, ele será a base dum cilindro $\mathrm{C}(A)\varepsilon C(A)$, ter-se-á $\mathrm{C}^-(A)\varepsilon C(A)$ e a fórmula 43b) dará $[\mathrm{C}^*(A)]^- = [\mathrm{C}^-(A)]^*\varepsilon C^*(A)$. Em face do exposto, concluímos que a classe $C^*(A)$, ou seja a base de A em Ω^*, cumpre com a definição de álgebra-σ tirada de Ω^*, c. q. d.

Dados os espaços Ω, Ω^* e Ω^{**} aqui introduzidos, então o teorema 27 faz corresponder a qualquer espaço mensurável (Ω, A) o novo espaço mensurável $(\Omega, C(A))$ e, por outro lado, o corolário

27' e o facto de Ω^* ser a base do cilindro Ω fazem corresponder a qualquer espaço mensurável (Ω,A) o novo espaço mensurável $(\Omega^*,C^*(A))$ ou, em notação mais sucinta, $(\Omega,C(A))^*$, a que podemos chamar, coerentemente, *espaço mensurável marginal* ou *base de* (Ω,A) *em* Ω^*. Vamos considerá-lo como resultante do espaço mensurável original ou *marginado*, por meio duma operação denominada *marginação de* (Ω,A) *com respeito a* Ω^{**}. Também aqui a marginação (global) pode resolver-se em marginações parciais, associativas e comutativas, já que o procedimento é aplicável a Ω e a cada conjunto $C(A)\varepsilon C(A)$.

Exemplo 58. Seja qual for o ponto $\bar{\omega}^{**}\varepsilon\Omega^{**}$, sabemos, pelo exemplo 26 devidamente adaptado, que $\bar{\omega}^{**}$ corta qualquer conjunto $C(A)\varepsilon C(A)$ segundo a sua base $C^*(A)$, donde concluímos que se verifica a *igualdade entre classes* $C(A)/\bar{\omega}^{**} = C^*(A)$. Este facto e os teoremas 27 e 25 proporcionam uma via alternativa para a demonstração do corolário 27'.

Exercício 58. Retome as hipóteses do teorema 27 e prove que a álgebra-σ mínima [ou máxima] tirada de Ω tem uma base em Ω^* que é a álgebra-σ mínima [ou máxima] tirada de Ω^*.

3. Paralelismo entre cilindros e as suas bases

Posto isso, vamos examinar como o paralelismo entre cilindros e as suas bases se repercute no comportamento das álgebras-σ que lhes dizem respeito. Temos o

Teorema 28. «Considerem-se um espaço-produto Ω e um seu espaço marginal Ω^*. Então, dada uma classe C tirada de Ω e formada por cilindros, ela será uma álgebra-σ se e só se a respectiva base C^* for uma álgebra-σ tirada de Ω^*.»

Demonstração. Vamos recorrer várias vezes ao teorema 10 e ao corolário 8'.

Começando por supor que C é uma álgebra-σ, estamos perante o caso particular do corolário 27' em que $A = C$ e, por isso, $C^* =$

$= C^*(C)$ resulta uma álgebra-σ tirada de Ω^*. Assim falta apenas provar que a classe C é uma álgebra-σ sempre que C^* o for.

Sabemos, pela relação 42a), que os cilindros C e as suas bases C* se correspondem biunivocamente. Então, se C^* for uma álgebra-σ tirada de Ω^*, existem bases $C^* \varepsilon C^*$, de modo que existem os correspondentes cilindros $C \varepsilon C$. Além disso, escolhido arbitrariamente um cilindro $C \varepsilon C$, a fórmula 43b) dará $(C^-)^* = (C^*)^- \varepsilon C^*$, donde $C^- \varepsilon C$. Por outro lado, escolhidos arbitrariamente cilindros $C_n \varepsilon C (n = 1, 2, 3, \ldots)$, com bases $C^*_n \varepsilon C^*$, a fórmula 42e) dará $(\underset{n}{V} C_n)^* = \underset{n}{V} C^*_n \varepsilon C^*$, donde $\underset{n}{V} C_n \varepsilon C$. Em face do exposto, é óbvio que a classe C cumpre com a definição de álgebra-σ tirada de Ω, c. q. d.

Observação. Seja τ uma operação arbitrariamente escolhida entre as operações internas usuais (a incidir sobre conjuntos) e suponhamos que C é uma classe não-vazia, tirada de Ω e formada por cilindros com base em Ω^*. Então, se aplicarmos τ simultaneamente a diversos cilindros $C_t \varepsilon C$ e às correspondentes bases $C^*_t \varepsilon C^*$, isso com t a percorrer uma família T compatível com a operatória escolhida, o recurso a τ_t ou seja a τ quando t percorre T, a hipótese

$$\tau_t(C_t) \varepsilon C \text{ [ou } \tau_t(C^*_t) \varepsilon C^*]$$

e as fórmulas 42) e 43) dão a relação

$$\tau_t(C^*_t) = (\tau_t(C_t))^* \text{ [ou } (\tau_t(C_t))^* = \tau_t(C^*_t)],$$

donde a nova relação

$$\tau_t(C^*_t) \varepsilon C^* \text{ [ou } \tau_t(C_t) \varepsilon C].$$

Daí uma generalização do teorema 28 para quaisquer classes não-vazias, tiradas de Ω, formadas por cilindros com base em Ω^* e fechadas com respeito a operações internas usuais.

Posto isso, vamos acrescentar um resultado que estende o paralelismo tratado no teorema 28 a classes geradoras de álgebras-σ e de que necessitamos no decurso da demonstração do teorema 33. Temos o

Teorema 29. «Dados um espaço-produto Ω e um seu espaço marginal Ω^*, então qualquer classe não-vazia C formada por cilindros gera uma álgebra-σ que é formada exclusivamente por cilindros e que tem base em Ω^* coincidente com a álgebra-σ gerada pela base de C.»

Demonstração. Em face do simbolismo introduzido através da fórmula 55), a tese do enunciado atribui à álgebra-σ C^o gerada por C as propriedades de se compor exclusivamente de cilindros e de verificar a igualdade

$$(C^o)^* = (C^*)^o \tag{57}$$

onde $C^o = \bigwedge_{v \in V} E_v$, com E_v a representar a álgebra-σ genérica tirada de Ω e tal que $C \leqslant E_v$, e onde $(C^*)^o = \bigwedge_{w \in W} F^*_w$, com F^*_w a representar a álgebra-σ genérica tirada de Ω^* e tal que $C^* \leqslant F^*_w$.

Ora, seja qual for a classe E_v, a sua subclasse cilíndrica $C(E_v)$ está contida em E_v, não deixa de conter C e é, atendendo ao teorema 27, uma álgebra-σ e, portanto, é uma das classes cuja intersecção conduz a C^o. Logo as propriedades da intersecção vistas no n.º **1** do § 4 e a nota à demonstração da fórmula 16) dão a igualdade $C^o = \bigwedge_{u \in U} C_u$ onde C_u representa a álgebra-σ genérica tirada de Ω, formada por cilindros e tal que $C \leqslant C_u$, facto este que *força C^o a ser uma classe composta exclusivamente por cilindros.*

Posto isso, o resultado 42a) dá $C^* \leqslant C^*_u$, para cada u, e dá também $(C^o)^* = \bigwedge_{u \in U} C^*_u$ onde, atendendo ao teorema 28, cada C^*_u é uma álgebra-σ e, portanto, é uma classe F^*_w. Por outro lado, seja qual for w, a relação já vista $C^* \leqslant F^*_w$ e os resultados 42b) e a) implicam $C \leqslant F_w$, onde F_w é uma classe de cilindros que tem base F^*_w e que, atendendo ao teorema 28, resulta uma álgebra-σ e logo resulta uma classe C_u. Nesta conformidade, cada F^*_w é uma classe C^*_u, de modo que ficam identificadas as intersecções

$$\bigwedge_{u \in U} C^*_u = (C^o)^* \quad \text{e} \quad \bigwedge_{w \in W} F^*_w = (C^*)^o.$$

Daí a igualdade 57) e chegamos assim ao fim da demonstração.

4. Passagem de decomposições

Vejamos, por fim, como as decomposições acompanham a transformação dum espaço mensurável na correspondente base.

Temos o

Teorema 30. «Consideremos um espaço-produto Ω, um seu espaço marginal Ω^*, uma álgebra-σ A tirada de Ω e ainda a correspondente álgebra-σ $C(A)$ coincidente com a subclasse cilíndrica de A. Então, qualquer decomposição do espaço mensurável $(\Omega,C(A))$ é também uma decomposição do espaço mensurável (Ω,A) e, caso (Ω,A) admita uma decomposição irredutível, o mesmo sucede a $(\Omega,C(A))$. Por outro lado, uma classe D tirada de Ω será uma decomposição [ou decomposição irredutível] de $(\Omega,C(A))$ se e só se a respectiva base D^* for uma decomposição [ou decomposição irredutível] da base $(\Omega,C(A))^*$.»

Demonstração. Caso $(\Omega,C(A))$ admita a decomposição $D =$ $= \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n, \dots\}$, os conjuntos C_n serão cilindros não-vazios, disjuntos dois a dois, pertencentes a $C(A)$ e com soma igual a Ω. Como $C(A) \leqslant A$, a classe D será também uma decomposição de (Ω,A), mais precisamente uma *decomposição cilíndrica.* Por outro lado, se (Ω,A) admitir uma decomposição irredutível, o teorema 17 assegura que $(\Omega,C(A))$ se vai encontrar na mesma situação. Arrumada assim a parte da tese em que se recua para (Ω,A), vamos passar para a parte em que se avança para $(\Omega,C(A))^*$.

Em seguida, vamos recorrer às fórmulas 42) e 43) sem esquecer a correspondência biunívoca entre cilindros C e as suas bases C*, que inclui a correspondência entre o cilindro vazio e a base vazia. Então, seja qual for o número natural n que convenha considerar, tem-se $\mathrm{C}_n \varepsilon C(A)$ se e só se $\mathrm{C}^*_n \varepsilon C^*(A)$, tem-se $\mathrm{C}_n \neq O$ propriamente contido em Ω se e só se $\mathrm{C}^*_n \neq O^*$ propriamente contido em Ω^* e, além disso, há disjunção entre os conjuntos C_n tomados dois a dois se e só se houver disjunção entre os conjuntos C^*_n tomados dois a dois. Como $\dot{\sum_n} \mathrm{C}_n = \Omega$ se e só se $(\dot{\sum_n} \mathrm{C}_n)^* = \dot{\sum_n} \mathrm{C}^*_n = \Omega^*$ acabamos por concluir que $D = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n, \dots\}$ é uma decomposição de $(\Omega,C(A))$ se e só se $D^* = \{\mathrm{C}^*_1, \mathrm{C}^*_2, \dots, \mathrm{C}^*_n, \dots\}$ for uma decomposição de $(\Omega^*,C^*(A)) = (\Omega,C(A))^*$.

Falta apenas provar que, dado o par de decomposições D e D^*, correspondentes entre si, a redutibilidade duma delas implica a redutibilidade da outra. Ora, se D[ou D^*] for redutível, existe um cilindro $C \varepsilon C(A)$ [ou uma base $C^* \varepsilon C^*(A)$] tal que O propriamente contido em C propriamente contido em C_m [ou O^* propriamente contido em C^* propriamente contido em C^*_m] para um certo valor m do índice n, facto este que acarreta, para o mesmo valor m, a relação O^* propriamente contido em C^* propriamente contido em C^*_m [ou O propriamente contido em C propriamente contido em C_m], com $C^* \varepsilon C^*(A)$ [ou $C \varepsilon C(A)$], a qual impõe a redutibilidade de D^* [ou D], c. q. d.

Exemplo 59. Há casos em que (Ω,A) não admite decomposição irredutível e, todavia, existe uma decomposição irredutível para $(\Omega,C(A))$ e para $(\Omega,C(A))^*$. É o que acontece quando se trabalha com o espaço-produto $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, com Ω_1 igual a uma recta real e com Ω_2 igual a um espaço intransnumerável, desde que se tome $\Omega^* = \Omega_2$ e desde que se escolha para A a álgebra-σ máxima tirada de Ω. Com efeito, a intransnumerabilidade de Ω_2 e o corolário 17' asseguram a existência duma decomposição irredutível para $(\Omega,C(A))^*$ e logo, atendendo ao teorema 30, para $(\Omega,C(A))$. Por outro lado, se admitirmos a existência duma decomposição irredutível para (Ω,A) e se tomarmos $\Omega^* = \Omega_1$, então a classe $C(A)$ terá por base a álgebra-σ máxima 2^{Ω_1}, o teorema 30 imporá a existência duma decomposição irredutível para $(\Omega_1, 2^{\Omega_1})$, o teorema 17 imporá a existência duma decomposição irredutível para (Ω_1,B_1), com $B_1 \leqslant 2^{\Omega}$ igual à álgebra de Borel tirada de Ω_1, e finalmente o exemplo 49 far-nos-á cair numa situação absurda.

Exercício 59. Atribuindo aos símbolos Ω, A e $C(A)$ os significados habituais neste contexto, dê um exemplo duma classe tirada do espaço Ω (apropriadamente escolhido) que seja uma decomposição de (Ω,A) sem ser decomposição de $(\Omega,C(A))$.

§ 18 — MULTIPLICAÇÃO TRANSPOSTA OU DE CLASSES. PRODUTOS DE ESPAÇOS MENSURÁVEIS

1. Multiplicação (transposta) de classes

Retomemos o espaço-produto $\Omega(\omega) = \underset{t\epsilon T}{\times} \Omega_t(\omega_t)$ dos n.os **1** do § 16 e do § 17 onde $\omega = (\omega_t, t\varepsilon T)$, onde se supõe escolhido um dispositivo de entrada para as (pelo menos duas) determinações do índice genérico t da família T e onde, seja qual for t, usaremos o símbolo 2^{Ω_t} para representar o espaço cujo ponto genérico é o conjunto genérico contido em Ω_t.

Nesta conformidade, façamos corresponder a cada $t\varepsilon T$ uma classe não-vazia $K_t \leqslant 2^{\Omega_t}$ ou, mais explicitamente, uma classe $K_t(\mathrm{K}_t)$ de conjunto genérico $\mathrm{K}_t \leqslant \Omega_t$. Então, a classe formada pelos produtos (cartesianos) $\underset{t\epsilon T}{\times} \mathrm{K}_t = \mathrm{P} \leqslant \Omega$ possíveis constitui-se em classe não-vazia $P \leqslant 2^{\Omega}$, a que vamos chamar *classe dos produtos,* subentende-se emanados das classes $K_t(t\varepsilon T)$. *A classe P é nitidamente distinta do produto* (cartesiano) $\underset{t\epsilon T}{\times} K_t \leqslant \underset{t\epsilon T}{\times} 2^{\Omega_t}$, cujo ponto genérico $(\mathrm{K}_t, t\varepsilon T)$ se sujeita, atendendo à fórmula 35"), à relação entre classes $\{(\mathrm{K}_t, t\varepsilon T)\} = \underset{t\epsilon T}{\times} \{\mathrm{K}_t\} \leqslant \underset{t\epsilon T}{\times} 2^{\Omega_t}$. Em relação a Ω, a classe P é uma classe de produtos e não é nenhum produto de classes. Nesta conformidade, podíamos chamar a P produto transposto das classes $K_t(t\varepsilon T)$. Todavia, atendendo a motivos expositivos, preferimos essa designação para uma certa sobreclasse de P, em geral diferente de P.

Posto isso, vamos recordar as definições do n.º **1** do § 11, vamos introduzir uma classe $L \leqslant 2^{\Omega}$ estabilizada com respeito a certas operações internas (a incidir sobre os seus conjuntos) e vamos designar por P^{o} a classe que é do tipo de L e que é gerada por P. Neste contexto, vamos chamar à classe P^{o} *produto* (*transposto*) das classes $K_t(t\varepsilon T)$, vamos chamar *factores* a essas classes, vamos denominar *multiplicação* (*transposta*) das classes K_t à operação que as transforma no respectivo produto e vamos consubstanciar as convenções feitas através da *igualdade simbólica*

$$P^{o} = \dot{\underset{t\epsilon T}{\times}} K_t. \tag{58}$$

Talvez valha a pena chamar a atenção para o *caso de degenerescência* em que a família T se compõe dum só elemento t, digamos $t = 1$, caso este em que P se reduz a K_1 e o produto da fórmula 58) se reduz a $K_1^{o} = \dot{\underset{t=1}{\times}} K_t$ ou seja a uma classe que o resultado 56b) identifica com K_1 se e só se K_1 tiver o mesmo tipo que L.

2. Produto dum número finito de semianéis

A multiplicação de classes aqui definida corre de feição particularmente agradável quando a família T é formada pelos $N < +\infty$ índices $n = 1,2,\ldots,N$, quando cada uma das classes $K_n(K_n) \leqslant 2^{\Omega_n}$ é um semianel e quando se pretende que o produto $P^{o} \leqslant 2^{\Omega}$ seja a intersecção de todos os semianéis que contêm P. Neste caso, o resultado 56b) adapta-se e conduz a $P = P^{o}$ se P for um semianel.

É o que acontece efectivamente porque temos o

Teorema 31. «Quando se trabalha com um número finito de espaços-factores, então é um semianel (tirado do espaço-produto) a classe dos produtos emanados de quaisquer semianéis tais que haja um e só um por cada espaço-factor.»

Demonstração. Atendendo à associatividade da multiplicação (cartesiana) de conjuntos, é suficiente provar a tese do enunciado no caso de haver dois espaços-factores, digamos Ω^* e Ω^{**}, aos quais correspondem, por hipótese, dois semianéis, respectivamente K^* de conjunto genérico K^* e K^{**} de conjunto genérico K^{**}, donde uma classe P formada por todos os produtos $\mathrm{K}^* \times \mathrm{K}^{**} = \mathrm{P} \leqslant \Omega^* \times \Omega^{**} = \Omega$. Claro que os semianéis K^* e K^{**} se encontram sujeitos aos considerandos produzidos na parte introdutória do n.º **2** do § 11, entre os quais citamos que o vazio O^* (propriamente contido em Ω^*) pertence a K^* e que o vazio O^{**} (propriamente contido em Ω^{**}) pertence a K^{**}. Ora, se escolhermos arbitrariamente dois conjuntos pertencentes à classe P, digamos $\mathrm{P} = \mathrm{K}^* \times \mathrm{K}^{**} (\mathrm{K}^* \varepsilon K^*$ e $\mathrm{K}^{**} \varepsilon K^{**})$ e $\mathrm{Q} = \mathrm{L}^* \times \mathrm{L}^{**} (\mathrm{L}^* \varepsilon K^*$ e $\mathrm{L}^{**} \varepsilon K^{**})$, sabemos, pela definição de semianel, que

$$\mathrm{K}^* \wedge \mathrm{L}^* \varepsilon K^* \quad \text{e} \quad \mathrm{K}^{**} \wedge \mathrm{L}^{**} \varepsilon K^{**},$$

pelo que a fórmula 33) dá

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = (\mathrm{K}^* \wedge \mathrm{L}^*) \times (\mathrm{K}^{**} \wedge \mathrm{L}^{**}) \varepsilon P.$$

Reconhecemos assim que a classe P é fechada com respeito à intersecção binária; logo *a demonstração ficará concluída se conseguirmos provar que P cumpre com a condição de cadeia típica dum semianel.*

Assumamos então que os produtos escolhidos P e Q são tais que $\mathrm{P} \leqslant \mathrm{Q}$ e ponhamos de lado o caso imediato em que $\mathrm{P} = \mathrm{K}^* \times \mathrm{K}^{**} = O$ (propriamente contido em Ω), donde $\mathrm{Q} - \mathrm{P} = \mathrm{Q} \varepsilon P$, ou seja o caso em que a cadeia exigida fica com um só elo. Então, o teorema 6 dá $\mathrm{K}^* \leqslant \mathrm{L}^*$ e $\mathrm{K}^{**} \leqslant \mathrm{L}^{**}$. Por outro lado, a definição de semianel garante a existência de dois números naturais I e J tais que não só

$$\mathrm{K}^*_{\mathrm{i}} \varepsilon K^* (\mathrm{i} = 0,1, \dots, \mathrm{I}), \mathrm{K}^*_0 = \mathrm{K}^*, \mathrm{K}^*_{\mathrm{I}} = \mathrm{L}^*, \mathrm{K}^*_{\mathrm{i}} \leqslant \mathrm{K}^*_{\mathrm{i+1}}$$

para $\mathrm{i} < \mathrm{I}$ e $\mathrm{K}^*_{\mathrm{i+1}} - \mathrm{K}^*_{\mathrm{i}} \varepsilon K^*$ para $\mathrm{i} < \mathrm{I}$, como também

$$\mathrm{K}^{**}_{\mathrm{j}} \varepsilon K^{**} (\mathrm{j} = 0,1, \dots, \mathrm{J}), \mathrm{K}^{**}_0 = \mathrm{K}^{**}, \mathrm{K}^{**}_{\mathrm{J}} = \mathrm{L}^{**}, \mathrm{K}^{**}_{\mathrm{j}} \leqslant \mathrm{K}^{**}_{\mathrm{j+1}}$$

para $\mathrm{j} < \mathrm{J}$ e $\mathrm{K}^{**}_{\mathrm{j+1}} - \mathrm{K}^{**}_{\mathrm{j}} \varepsilon K^{**}$ para $\mathrm{j} < \mathrm{J}$.

Então, as fórmulas 13''), 51) e 31') e as propriedades da adição dão

$$Q = L^* \times L^{**} = [K^*_0 \dot{+} \underset{0 \leqslant i \leqslant I-1}{\dot{\Sigma}} (K^*_{i+1} - K^*_i)] \times$$

$$\times [K^{**}_0 \dot{+} \underset{0 \leqslant j \leqslant J-1}{\dot{\Sigma}} (K^{**}_{j+1} - K^{**}_j)] =$$

$$= (K^*_0 \times K^{**}_0) \dot{+} (K^*_0 \times [\underset{0 \leqslant j \leqslant J-1}{\dot{\Sigma}} (K^{**}_{j+1} - K^{**}_j)]) \dot{+}$$

$$\dot{+} ([\underset{0 \leqslant i \leqslant I-1}{\dot{\Sigma}} (K^*_{i+1} - K^*_i)] \times L^{**}). \tag{59}$$

Mas, seja qual for $i < I$ [ou $j < J$], o crescimento dos K^*_i [ou K^{**}_j] e a fórmula 17') permitem escrever

$$K^*_{i+1} = K^*_0 \vee K^*_1 \vee \ldots \vee K^*_{i+1} = K^*_0 \dot{+}$$

$$\dot{+} (K^*_1 - K^*_0) \dot{+} \ldots \dot{+} (K^*_{i+1} - K^*_i)$$

$$[\text{ou } K^{**}_{j+1} = K^{**}_0 \vee K^{**}_1 \vee \ldots \vee K^{**}_{j+1} = K^{**}_0 \dot{+}$$

$$+ (K^{**}_1 - K^{**}_0) \dot{+} \ldots \dot{+} (K^{**}_{j+1} - K^{**}_j)].$$

Posto isso, vamos retomar o último membro da fórmula 59) e vamos destacar daí as seguintes somas iniciais:

$$P = K^* \times K^{**}, (K^*_0 \times K^{**}_0) \dot{+} (K^*_0 \times [(K^{**}_1 - K^{**}_0) \dot{+} \ldots$$

$$\ldots \dot{+} (K^{**}_{j+1} - K^{**}_j)]) = K^* \times K^{**}_{j+1}$$

para $j = 0,1, \ldots, J - 1$ e

$$(K^*_0 \times K^{**}_J) \dot{+} ([K^*_1 - K^*_0) \dot{+} \ldots$$

$$\ldots \dot{+} (K^*_{i+1} - K^*_i)] \times L^{**}) = K^*_{i+1} \times L^{**}$$

para $i = 0,1, \ldots, I - 1$. Estas somas iniciais dispõem-se em sequência crescente com $(I + J + 1)$ termos todos pertencentes à classe *P*, com primeiro termo igual a P e com último termo igual a Q; são tais que a fórmula 30) reduz a diferença entre qualquer termo posterior ao primeiro e o seu antecessor ou à forma

$$(K^* \times K^{**}_{j+1}) - (K^* \times K^{**}_j) =$$

$$= K^* \times (K^{**}_{j+1} - K^{**}_j) \varepsilon P \; (j = 0,1, \ldots, J - 1)$$

ou † à forma

$$(K^*_{i+1} \times L^{**}) - (K^*_i \times L^{**}) =$$

$$= (K^*_{i+1} - K^*_i) \times L^{**} \varepsilon P \; (i = 0,1, \ldots, I - 1), \text{ c. q. d.}$$

Observação. Se a família T deixar de ser finita, então — mesmo que se tenha o caso mais acessível, o duma família numerável — a tentativa de salvaguardar o teorema 31 levar-nos-ia a uma relação do tipo da fórmula 59) em que os membros segundo e terceiro teriam cada um uma infinidade numerável de factores e assim, ressalvados certos casos de degenerescência, o desenvolvimento ulterior esbarraria com complicações relativas à potência do conjunto formado pelas parcelas †† e, na hipótese de poder prosseguir, ultrapassaria a condição de cadeia dum semianel (a qual consente apenas um número finito de elos).

Exemplo 60. Suponhamos que o espaço Ω é o produto dos espaços $\Omega_1 = \{1,2\}$ e $\Omega_2 = \{1,2\}$, produto este a que a fórmula 28*) atribui 4 pontos, e admitamos que $K_1 = 2^{\Omega_1}$ e $K_2 = 2^{\Omega_2}$, duas classes estas que o exemplo 39 institui em álgebras-σ máximas e logo em álgebras, que o resultado 53c) institui em anéis e que o resul-

---

† A relação óbvia $K^* \times K^{**}_J = K^*_0 \times L^{**}$ permite considerar o termo de charneira, o termo número $J + 1$, indiferentemente como termo do mesmo tipo dos anteriores ou como do mesmo tipo dos posteriores.

†† Compare-se com o texto a seguir à fórmula 31).

tado 52c) institui em semianéis. Portanto, o teorema 31 mostra que $P = \{O, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}, \{(2,1)\}, \{(2,2)\}, \{(1,1), (1,2)\}, \{(2,1), (2,2)\}, \{(1,1), (2,1)\}, \{(1,2), (2,2)\}, \Omega\}$ é um semianel, o qual apresenta 10 conjuntos, *não é nenhuma álgebra-σ* por causa do corolário 18', também não é álgebra por causa do exemplo 38 e nem sequer é anel por causa do exemplo 34. — Caso queiramos interpretar a classe P^o da fórmula 58) como a álgebra-σ gerada por P, então o resultado 56a) e o corolário 18' obrigam P^o a comportar no mínimo 16 conjuntos. Por outro lado, o texto introdutório do n.º **2** do § 10 confere a Ω um número de conjuntos igual a $2^4 = 16$. Em face do exposto, concluímos que P^o comporta precisamente 16 conjuntos e se identifica com a álgebra-σ máxima tirada de Ω.

Exercício 60. Considere o espaço-produto do enunciado do teorema 31 com $N < +\infty$ espaços-factores Ω_n e suponha que, seja qual for n, o semianel K_n (tirado de Ω_n) tem uma condição de cadeia em que figura um máximo de $I_n < +\infty$ diferenças ou elos. Nesta conformidade, indique o número máximo de elos da condição de cadeia para o semianel formado pela classe dos produtos emanados dos K_n.

Exercício 61. Modifique a demonstração do teorema 31, mudando de L^{**} para L^* o papel de destaque na passagem do segundo membro da fórmula 59) para o respectivo terceiro membro. Quantas alternativas haverá se passarmos do caso de dois factores para o caso geral de $N < +\infty$ factores, com $N > 2$?

3. **Multiplicação de espaços mensuráveis**

Reveste-se de interesse especial o caso em que, por um lado, cada uma das classes K_t da fórmula 58) é uma álgebra-σ tirada do respectivo espaço-factor Ω_t e em que, por outro lado, se interpreta P^o como sendo a álgebra-σ gerada pela classe P, caso este que assinalaremos usualmente empregando o símbolo $\mathcal{A}_t$ para a álgebra-σ K_t, o símbolo A_t para o conjunto genérico de K_t, o símbolo $\mathcal{A}$ para a álgebra-σ P^o e o símbolo A para o conjunto genérico de P^o. Note-se que a relação geral $P \leqslant P^o$, decorrente do resultado

56a), no caso aqui considerado se costuma converter em P propriamente contido em P^o (compare-se com o exemplo 60).

Postas essas premissas, a fórmula 58) assume o aspecto particular

$$A = \dot{\underset{t \epsilon T}{\times}} A_t \tag{58'}$$

onde, seja qual for t, a classe A_t é uma álgebra-σ de conjunto genérico A_t e onde $A = P^o$ é a álgebra-σ gerada pela classe P que se compõe dos produtos $\underset{t \epsilon T}{\times} \mathrm{A}_t = \mathrm{P}$ possíveis. Neste contexto, chamamos à álgebra-σ A *produto* (*transposto*) *das álgebras-*σ $A_t(t \varepsilon T)$, um produto que consideramos resultante da *multiplicação* (*transposta*) *dos factores* A_t, multiplicação essa que permite relacionar os espaços mensuráveis (Ω_t, A_t) $(t \varepsilon T)$ com o novo espaço mensurável (Ω, A) onde, não o esqueçamos, Ω é o produto (cartesiano) dos espaços $\Omega_t(t \varepsilon T)$. Podemos consubstanciar as considerações precedentes através da *igualdade simbólica*

$$(\Omega, A) = (\underset{t \epsilon T}{\times} \Omega_t, \dot{\underset{t \epsilon T}{\times}} A_t) = \dot{\underset{t \epsilon T}{\times}} (\Omega_t, A_t), \tag{60}$$

onde a parte final se baseia na convenção de considerar o primeiro membro como *produto* (*transposto*) *dos espaços mensuráveis* do último membro, estes instituídos em *factores cuja multiplicação* (*transposta*) conduz ao primeiro membro.

Posto isso, vamos ver como as decomposições acompanham a multiplicação de espaços mensuráveis. Temos o

Teorema 32. «Dados os espaços mensuráveis (Ω_n, A_n) $(n = 1,2, \dots, N < +\infty)$, suponha-se que, seja qual for n, a classe D_n de conjunto genérico A_{n,p_n} $(p_n = 1,2,3, \dots)$ é uma decomposição do espaço mensurável (Ω_n, A_n). Então, a classe formada pelos produtos $\mathrm{A}_{1,p_1} \times \mathrm{A}_{2,p_2} \times \dots \times \mathrm{A}_{N,p_N}$ possíveis fica instituída em decomposição do produto dos espaços mensuráveis dados, a qual será irredutível se e só se for irredutível cada uma das decomposições D_n.»

Demonstração. Atendendo à definição de decomposição dum espaço mensurável, temos, seja qual for n, a relação $\Omega_n = \dot{\sum\limits_{p_n}} A_{n,p_n}$, onde O_n propriamente contido em $A_{n,p_n} \varepsilon \mathcal{A}_n (p_n = 1,2,3, \ldots)$. Então, a fórmula 31') dá

$$\Omega = \underset{n}{\times} (\dot{\sum_{p_n}} A_{n,p_n}) = \dot{\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_N}} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \ldots \times A_{N,p_N}), \tag{61}$$

onde não há nenhuma parcela vazia no último somatório e onde, além disso, a definição da classe P e o resultado 56a) mostram que cada parcela do último somatório pertence a $P^o = \mathcal{A}$. Concluímos assim que a classe D formada pelos produtos referidos no enunciado é efectivamente uma decomposição do espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$ da fórmula 60).

Suponhamos agora que uma das decomposições D_n é redutível, o que acarreta que ao seu índice n correspondam um inteiro p_n e um conjunto $A'_{n,p_n} \varepsilon \mathcal{A}_n$ tais que O_n propriamente contido em A'_{n,p_n} propriamente contido em A_{n,p_n}. Então, o teorema 6 e o corolário 6' dão a relação

O propriamente contido em $A_{1,p_1} \times \ldots \times A'_{n,p_n} \times \ldots \times A_{N,p_N}$

propriamente contido em $A_{1,p_1} \times \quad \times A_{n,p_n} \times \ldots \times A_{N,p_N}$,

onde os produtos envolvidos pertencem todos a $\mathcal{A}$.

Concluímos assim que D é uma decomposição redutível de $(\Omega,\mathcal{A})$. Logo a nossa demonstração ficará completada se conseguirmos provar que a irredutibilidade de D decorre da irredutibilidade de todas as decomposições D_n.

Ora, se as D_n forem todas irredutíveis, o teorema 14 dá, seja qual for n e seja qual for $A_n \varepsilon \mathcal{A}_n$, a relação $A_n \varepsilon S_n$, onde S_n designa a classe das somas extraídas de D_n. Então, qualquer produto $\underset{n}{\times} A_n \varepsilon P$ será um produto de somas parciais em relação ao segundo membro de 61) e, por isso, será uma soma parcial do último membro de 61); por outras palavras, vale a relação $P \leqslant S$, onde S designa a classe das somas extraídas de D. Portanto, os resultados 56c) e b) e o teorema 14 conduzem à relação $A \leqslant S$. Como o teorema 14 assegura a relação $S \leqslant A$, resulta $S = A$ e assim resulta a irredutibilidade de D, c. q. d.

Exemplo 61. Se a família T deixar de ser finita, então — mesmo que se tenha o caso mais acessível, o duma família numerável — a tentativa de salvaguardar o teorema 32 levar-nos-ia a uma relação do tipo da fórmula 61), em que o segundo membro teria uma infinidade numerável de factores e assim, ressalvados certos casos de degenerescência, o último membro teria um conjunto de parcelas com potência transnumerável, de modo que essas parcelas não poderiam ser os elementos duma decomposição de (Ω,A). Eis uma das razões por que é pouco acessível o estudo aprofundado dos produtos de espaços mensuráveis com uma infinidade de factores. — Pode ir-se um pouco mais longe afirmando que, no caso de haver uma infinidade numerável de espaços-factores e ressalvada a hipótese de haver apenas um número finito de factores (Ω_n,A_n) dotados de decomposições $D_n \neq \{\Omega_n\}$ ou seja de decomposições com mais de um elemento, debaixo deste condicionalismo, (Ω,A) não pode admitir nenhuma decomposição irredutível, † isto mesmo que se aceitem elementos de decomposição que não sejam exclusivamente parcelas do último membro dalguma fórmula 61) seleccionada para o efeito. Pois, se uma tal decomposição irredutível existisse e se a designássemos por D, podíamos partir de decomposições D_n dos (Ω_n,A_n) que (à laia da observação que precede o exemplo 8) conduzissem a um último membro de 61) com uma infinidade transnumerável de parcelas $P \varepsilon A$; cada uma dessas parcelas P seria uma soma não-vazia e extraída de D, duas parcelas P distintas entre si exigiriam o recurso a duas somas disjuntas entre si e ambas extraídas de D, a infinidade transnumerável de parcelas P (acima citada) consumiria uma infinidade transnumerável de conjuntos pertencentes a D e cairíamos em contradição com a definição de decomposição dum espaço mensurável.

---

† Claro que a impossibilidade alegada não surge quando se conserva o espaço Ω do texto e quando se isenta a correspondente álgebra-σ A de ser da forma referida na igualdade 60). Veja-se o exemplo 41 onde Ω pode ser um produto de infinitos factores e onde $D = \{A,A^-\}$ é sempre uma decomposição irredutível de (Ω,A).

Exercício 62. Dados os espaços $\Omega_1 = \{1,2,3\}$ e $\Omega_2 = \{1,2,3,4\}$, considere as classes elementares $G_1 = \{\{1\}\}$ e $G_2 = \{\{1,2\}\}$ e as álgebras-σ G_1^o e G_2^o geradas por elas, a primeira tirada de Ω_1 e a outra tirada de Ω_2. Em seguida, forme decomposições irredutíveis dos espaços mensuráveis (Ω_1,G_1^o) e (Ω_2,G_2^o), deduza delas uma decomposição irredutível do produto $(\Omega,A) = \dot{\times}_{1 \leqslant n \leqslant 2} (\Omega_n,G^o{}_n)$ e aproveite a decomposição deduzida para formar todos os conjuntos de (Ω,A).

4. **Casos de associatividade da multiplicação de classes**

Em seguida, vamos generalizar a posição assumida no n.º **3**, libertando as classes não-vazias K_t (da fórmula 58)) da imposição de serem álgebras-σ; mas continuamos a interpretar a classe P^o da fórmula 58) como sendo a álgebra-σ gerada pela classe P composta dos produtos emanados das classes K_t, álgebra-σ essa que assinalaremos usualmente empregando o símbolo A para ela e o símbolo A para o seu conjunto genérico. Por outro lado, vamos particularizar supondo que os factores do espaço-produto Ω são espaços Ω_n (n = 1,2,3, ...) formando uma sequência ou, em certos casos, formando uma sucessão.

Nesta conformidade, a multiplicação (transposta) das classes K_n, de conjuntos genéricos $K_n \leqslant \Omega_n$ e supostas em número superior a 1, será considerada *uma operação associativa* se e só se, escolhido arbitrariamente um espaço-produto parcial $\Omega^* = \times_{n^*} \Omega_{n^*}$ — com n* a percorrer valores consecutivos de n *em número igual ou superior a* 1 —, o produto (transposto) $\dot{\times}_n K_n$ for insensível à substituição dos factores K_n tais que $n = n^*$ pelo correspondente produto parcial $\dot{\times}_{n^*} K_{n^*}$. Claro que esta definição de associatividade não impõe coisa nenhuma quando todo o n for um n*, mas impõe exigências nas demais hipóteses, incluindo o caso de haver um único n*, caso este em que a classe K_{n^*} é em geral diferente da álgebra-σ $K^o_{n^*}$ coincidente com o produto cujo único factor é K_{n^*} (veja-se o fim do n.º **1** deste parágrafo).

Postos esses preliminares, temos o

Teorema 33. «Dados os espaços-factores Ω_n, formando uma infinidade numerável ou em número finito superior a 1, faça-se corresponder a cada n uma classe não-vazia K_n de conjunto genérico $K_n \leqslant \Omega_n$. Então, a álgebra-σ igual ao produto $\dot{\times}_n K_n$ corresponde a uma multiplicação de classes que terá a propriedade associativa sempre que, seja qual for n, o espaço Ω_n for um conjunto $K_n \varepsilon K_n$.»

Demonstração. a) A álgebra-σ $A = \dot{\times}_n K_n$, transcrita da fórmula 58), é gerada pela classe P composta dos produtos $\times_n K_n = P$ possíveis, produtos esses que a escolha de *quaisquer* valores consecutivos n* assumidos por n, valores esses em número igual ou superior a 1, e a associatividade da multiplicação (cartesiana) de conjuntos, essa admitida em a) do n.º **3** do § 7, permitem escrever sob a forma $P = (\times_{n<n^*} K_n) \times (\times_{n^*} K_{n^*}) \times (\times_{n>n^*} K_n)$, onde o simbolismo $n < n^*$ [ou $> n^*$] refere que se devem tomar simultaneamente os valores de n inferiores [ou superiores] a todos os n* escolhidos e onde o primeiro ou o terceiro produto parcial pode falhar sem que possam falhar ambos, isto porque os n* podem ser números n iniciais ou números n finais e nunca podem ser todos os números n (caso este em que nada haveria para demonstrar). Aqui vamos prosseguir, admitindo a hipótese mais complicada em que não falha nenhum dos três produtos parciais e convidando o leitor a introduzir as simplificações adequadas aos casos em que se verifica a hipótese oposta. Por outro lado, a demonstração será conduzida por forma que se adapte a generalizações a introduzir posteriormente.

b) A álgebra-σ $\tilde{A} = \dot{\times}_{n^*} K_{n^*}$ tem conjunto genérico digamos $\tilde{A}$ e é gerada pela classe $\tilde{P}$ composta dos produtos $\times_{n^*} K_{n^*} = \tilde{P}$ possíveis. Então, a associação dos factores K_n de A tais que $n = n^*$ conduz a uma classe Q composta dos novos produtos $(\times_{n<n^*} K_n) \times \tilde{A} \times (\times_{n>n^*} K_n) = Q$ possíveis, classe essa que gera uma álgebra-σ

Q^o. Nesta conformidade, a tese do enunciado é equivalente à igualdade $A = Q^o$ (não se esqueça a arbitrariedade da escolha dos valores consecutivos n*).

c) O resultado 56a) e a definição de $\tilde{A}$ dão a relação $\tilde{P} \leqslant \tilde{P}^o = \tilde{A}$, pelo que o confronto entre as expressões dos produtos genéricos P e Q conduz à nova relação $P \leqslant Q$, a qual implica, atendendo ao resultado 56c), que se venha a ter $A = P^o \leqslant Q^o$. Portanto, a nossa demonstração ficará completada se conseguirmos deduzir a relação $Q^o \leqslant A$.

d) Até agora tirámos de $\Omega = \underset{n}{\times} \Omega_n$ duas classes geradoras de álgebras-σ, nomeadamente a classe P formada pelos produtos

$$(\underset{n<n*}{\times} K_n) \times (\underset{n*}{\times} K_{n*}) \times (\underset{n>n*}{\times} K_n) = P$$

e a classe Q formada pelos produtos

$$(\underset{n<n*}{\times} K_n) \times \tilde{A} \times (\underset{n>n*}{\times} K_n) = Q.$$

Posto isso, vamos introduzir mais três classes, nomeadamente:

a classe C formada pelos produtos

$$(\underset{n<n*}{\times} \Omega_n) \times (\underset{n*}{\times} K_{n*}) \times (\underset{n>n*}{\times} \Omega_n) = C;$$

a classe D formada pelos produtos

$$(\underset{n<n*}{\times} \Omega_n) \times \tilde{A} \times (\underset{n>n*}{\times} \Omega_n) = D;$$

a classe E formada pelos produtos

$$(\underset{n<n*}{\times} K_n) \times (\underset{n*}{\times} \Omega_{n*}) \times (\underset{n>n*}{\times} K_n) = E.$$

Todos os (conjuntos-)produtos envolvidos estão contidos em Ω, os conjuntos C e D são cilindros com base em $\Omega^* = \underset{n*}{\times} \Omega_{n*}$ e os conjuntos E são cilindros de geratrizes paralelas a Ω^*. A hipótese $\Omega_n \varepsilon K_n$ para cada n, admitida no enunciado, introduz as relações $C \leqslant P$ e $E \leqslant P$, as quais implicam $C \leqslant A$ e $E \leqslant A$. Por outro lado, se utilizarmos o símbolo * para classes marginais tomadas em Ω^*, as convenções relativas a C, D e $\tilde{A}$ e a fórmula 57) conduzem às relações $D^* = \tilde{A}$ e $(C^\circ)^* = (C^*)^\circ = \tilde{A}$, donde a nova relação $(C^\circ)^* = D^*$. Como há correspondência biunívoca e recíproca entre cilindros e as respectivas bases, concluímos que se verifica a igualdade $C^\circ = D$, a qual, atendendo a $C \leqslant A$ e aos resultados 56c) e b), implica a relação $D \leqslant A$, que será o esteio da parte final desta demonstração. Para já, as propriedades da intersecção e a igualdade da fórmula 33) permitem desenvolver o conjunto genérico da classe Q como segue:

$$\mathrm{Q} = [\underset{n<n^*}{\times}(\Omega_n \wedge \mathrm{K}_n)] \times [\Omega^* \wedge \tilde{\mathrm{A}}] \times [\underset{n>n^*}{\times}(\Omega_n \wedge \mathrm{K}_n)] =$$

$$= [(\underset{n<n^*}{\times}\Omega_n) \wedge (\underset{n<n^*}{\times}\mathrm{K}_n)] \times [\tilde{\mathrm{A}} \wedge (\underset{n^*}{\times}\Omega_{n^*})] \times [(\underset{n>n^*}{\times}\Omega_n) \wedge (\underset{n>n^*}{\times}\mathrm{K}_n)] =$$

$$= [(\underset{n<n^*}{\times}\Omega_n) \times \tilde{\mathrm{A}} \times (\underset{n>n^*}{\times}\Omega_n)] \wedge [(\underset{n<n^*}{\times}\mathrm{K}_n) \times (\underset{n^*}{\times}\Omega_{n^*}) \times$$

$$\times (\underset{n>n^*}{\times}\mathrm{K}_n)] = \mathrm{D} \wedge \mathrm{E}.$$

Este resultado, as relações já vistas $D \leqslant A$ e $E \leqslant A$ e ainda o corolário 10' mostram que vale a relação $Q \leqslant A$, a qual implica a nova relação $Q^\circ \leqslant A$, c. q. d.

Observação. No decurso da demonstração do teorema 33 utilizaram-se os símbolos $\tilde{A}$, $\tilde{P}$, $\tilde{\mathrm{P}}$ e $\tilde{\mathrm{A}}$, com o sinal ~ em lugar do sinal *, para evitar a eventual confusão com as projecções de A, P, P e A sobre $\Omega^* = \underset{n^*}{\times}\Omega_{n^*}$ (compare-se com o princípio do n.º 1 do § 17).

O teorema 33 admite o importante

Corolário 33'. «Dados os espaços-factores Ω_n, formando uma infinidade numerável ou em número finito superior a 1, faça-se corresponder a cada n uma álgebra K_n tirada de Ω_n. Então, a álgebra-σ igual ao produto $\underset{n}{\dot{\times}} K_n$ corresponde a uma multiplicação de classes que terá sempre a propriedade associativa. Em aditamento, se cada classe K_n for uma álgebra-σ A_n, a associatividade da multiplicação dos A_n não só subsiste mesmo que haja um só espaço-factor, como também se transmite em todos os casos à multiplicação dos espaços mensuráveis (Ω_n, A_n).»

Demonstração. O caso das álgebras resulta do teorema 33 e do facto de qualquer álgebra admitir o respectivo espaço como elemento estabilizador (veja-se o princípio do n.º **4** do § 11). Por outro lado, se houver mais do que um espaço-factor, o caso das álgebras-σ é apenas particular em relação ao caso das álgebras e, se houver apenas um espaço-factor, a única álgebra-σ dada é associativa por coincidir com a álgebra-σ gerada por ela, quer dizer com o produto cujo único factor é ela própria. Posto isso, falta apenas tratar da parte da tese que diz respeito à multiplicação de espaços mensuráveis.

O espaço mensurável $(\Omega,A) = \dot{\times}_{n}(\Omega_n,A_n) = (\times_{n}\Omega_n, \dot{\times}_{n} A_n)$, transcrito da fórmula 60), resulta duma multiplicação de espaços mensuráveis, a qual é obviamente associativa se houver apenas um factor e para a qual falta justificar a associatividade nos demais casos. Ora, se escolhermos arbitrariamente valores consecutivos n* assumidos por n, um ou mais valores sem serem todos os n: vamos designar eventualmente por $1, \dots, \alpha-1$ os números n inferiores a todos os n* e por $\beta + 1, \beta + 2, \dots$ os números n superiores a todos os n*; vamos descontar as simplificações adequadas à eventual ausência dum desses agrupamentos de números n diferentes de todos os n*; vamos tomar em conta a definição de espaço mensurável igual a um produto (transposto) de espaços mensuráveis, a associatividade da multiplicação (cartesiana) de conjuntos e a associatividade da multiplicação (transposta) de álgebras-σ conducente a uma álgebra-σ. Obtemos o desenvolvimento †

$$\dot{\times}_{n} (\Omega_n,A_n) = (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{\alpha-1} \times (\times_{n*} \Omega_{n*}) \times \Omega_{\beta+1} \times \dots ,$$

$$A_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} A_{\alpha-1} \dot{\times} (\dot{\times}_{n*} A_{n*}) \dot{\times} A_{\beta+1} \dot{\times} \dots) = (\Omega_1,A_1) \dot{\times} \dots \dot{\times} (\Omega_{\alpha-1}, A_{\alpha-1}) \dot{\times}$$

$$\dot{\times} (\times_{n*} \Omega_{n*}, \dot{\times}_{n*} A_{n*}) \dot{\times} (\Omega_{\beta+1}, A_{\beta+1}) \dot{\times} \dots ;$$

---

† Em seguida, usamos o símbolo $\dot{\times}$ colocado entre as representações de dois entes matemáticos para assinalar que esses entes devem ser ligados pela operação da multiplicação transposta.

logo a igualdade

$$(\dot{\times}_{n^*} \Omega_{n^*}, \dot{\times}_{n^*} A_{n^*}) = \dot{\times}_{n^*} (\Omega_{n^*}, A_{n^*}),$$

transcrita da fórmula 60) se houver mais do que um n*, prova a associatividade da multiplicação de espaços mensuráveis nos casos que faltava considerar, isto se interpretarmos a dita associatividade nos mesmos moldes da sua homóloga para classes, c. q. d.

Observação. O teorema 33 *e o corolário* 33' *valem também quando houver uma infinidade transnumerável de espaços-factores* $\Omega_t(t \varepsilon T)$, de classes não-vazias K_t com conjuntos genéricos $K_t \leqslant \Omega_t \varepsilon K_t$ e, eventualmente, de espaços mensuráveis (Ω_t, A_t). Com efeito, a demonstração do teorema 33 serve desde que se substitua n por t, se forme um «bloco» central com determinações t* do índice t, se invoque a associatividade em sentido lato da multiplicação cartesiana (referida a seguir à fórmula 37)), se ponha $t < t^*$ [ou $> t^*$] para as determinações de t anteriores [ou posteriores] a todos os t* e, por fim, se recorra à fórmula 37) em lugar da fórmula 33). Em seguida, a demonstração do corolário 33' também serve desde que se substituam n por t, n* por t* e os números $1, \dots, \alpha-1$ [ou $\beta+1, \beta+2, \dots$] pela determinação genérica t' [ou t''] do «bloco» inicial [ou terminal] formado pelas determinações $t < t^*$ [ou $> t^*$].

5. **Produto dum número finito de classes geradoras arredondadas**

Posto isso, vamos chamar a uma classe geradora duma álgebra-σ *classe geradora arredondada* se e só se lhe pertencerem conjuntos que formem uma subclasse intransnumerável e que tenham união igual ao respectivo espaço.

As classes geradoras arredondadas aqui definidas generalizam, obviamente, as classes do género referido no enunciado do teorema 33 (interpretadas como classes geradoras de álgebras-σ). Todavia a associatividade aí enunciada subsiste desde que se limite o número de espaços-factores. Com efeito, temos o

Teorema 34. «Dados os espaços-factores Ω_n, em número finito e superior a 1, faça-se corresponder a cada n uma classe K_n que possa ser considerada geradora arredondada duma álgebra-σ. Então, a álgebra-σ igual ao produto $\dot{\times}_{n} K_n$ corresponde a uma multiplicação de classes que terá a propriedade associativa.»

Demonstração. Serve a demonstração do teorema 33, com a única diferença que as relações $C \leqslant A$ e $E \leqslant A$, referidas na alínea d), deixam de ser quase imediatas e passam a necessitar de justificação mais alongada. Ora, se designarmos por $1, \ldots, \alpha-1$ os números $n < n^*$, por $\alpha, \ldots, \beta$ os números n do tipo de n^* e por $\beta + 1, \beta + 2, \ldots$ os números $n > n^*$, primeiro a hipótese de existirem (para cada n) conjuntos $K_{n,p_n} \varepsilon K_n (p_n = 1,2,3, \ldots)$ tais que $\overset{V}{_{p_n}} K_{n,p_n} = \Omega_n$ e depois o recurso à fórmula 31), sempre em casos que assegurem um segundo membro com (operação de) união intransnumerável, são incidências que permitem, com apoio no corolário 10', desenvolver os conjuntos genéricos $C \varepsilon C$ e $E \varepsilon E$ como segue:

$$C = [(\overset{V}{_{p_1}} K_{1,p_1}) \times \ldots \times (\overset{V}{_{p_{\alpha-1}}} K_{\alpha-1,p_{\alpha-1}})] \times [\underset{n^*}{\times} K_{n^*}] \times$$

$$\times [(\overset{V}{_{p_{\beta+1}}} K_{\beta+1,p_{\beta+1}}) \times (\overset{V}{_{p_{\beta+2}}} K_{\beta+2,p_{\beta+2}}) \times \ldots] =$$

$$= \overset{V}{_{p_1,\ldots,p_{\alpha-1},p_{\beta+1},p_{\beta+2},\ldots}} [(K_{1,p_1} \times \ldots \times K_{\alpha-1,p_{\alpha-1}}) \times$$

$$\times (\underset{n^*}{\times} K_{n^*}) \times (K_{\beta+1,p_{\beta+1}} \times K_{\beta+2,p_{\beta+2}} \times \ldots)] \varepsilon P^o = A;$$

$$E = [\underset{n<n^*}{\times} K_n] \times [(\overset{V}{_{p_\alpha}} K_{\alpha,p_\alpha}) \times \ldots \times (\overset{V}{_{p_\beta}} K_{\beta,p_\beta})] \times [\underset{n>n^*}{\times} K_n] =$$

$$= \overset{V}{_{p_\alpha,\ldots,p_\beta}} [(\underset{n<n^*}{\times} K_n) \times (K_{\alpha,p_\alpha} \times \ldots \times K_{\beta,p_\beta}) \times (\underset{n>n^*}{\times} K_n)] \varepsilon P^o = A.$$

Logo $C \leqslant A$ e $E \leqslant A$, c. q. d.

Uma consequência sensivelmente imediata do teorema 34 é o

Corolário 34'. «Com os mesmos dados do teorema 34, as classes arredondadas K_n em número finito e as álgebras-σ K°_n por elas geradas satisfazem à seguinte igualdade entre produtos de classes:

$$\dot{\times}_n K_n = \dot{\times}_n K^\circ_n.»$$

Demonstração. Notando que qualquer álgebra-σ é uma classe geradora arredondada de si própria, basta aplicar a propriedade associativa do teorema 34 primeiro à substituição do factor K_1 pelo produto com o único factor K_1, depois à substituição do factor K_2 pelo produto com o único factor K_2, etc., e, por fim, à substituição do último factor K_n pelo correspondente produto com um só factor.

Exemplo 62. Dados os espaços-factores $\Omega_n = \{1,2\}$ ($n = 1,2,3$) e dadas as classes elementares K_n formadas pelos conjuntos elementares $K_n = \{1\} \leqslant \Omega_n$, não só a fórmula 28") dá a classe P formada pelo único produto $\{1\}\times\{1\}\times\{1\} = \{(1,1,1)\} = P$, como também a fórmula 58) e o exemplo 43 conduzem à álgebra-σ $A =$ $= \dot{\times}_{1\leqslant n\leqslant 3} K_n = \{O,\Omega,P,P^-\}$. Por outro lado, recordando a nota à demonstração do corolário 33', podemos escolher o espaço marginal $\Omega^* = \Omega_1\times\Omega_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, a classe $\tilde{P}$ formada pelo único produto $\{1\}\times\{1\} = \{(1,1)\} = \tilde{P} \leqslant \Omega^*$, a álgebra-$\sigma$ $\tilde{A} = K_1 \dot{\times}$ $\dot{\times} K_2 = \{O^*,\Omega^*,\tilde{P},\tilde{P}^-\}$ e, em seguida, a álgebra-σ $(K_1 \dot{\times} K_2) \dot{\times} K_3 = \tilde{A} \dot{\times}$ $\dot{\times} K_3$, esta gerada pela classe que se compõe dos 4 produtos $O^*\times\{1\} =$ $= O, \Omega^*\times\{1\} = \{(1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1)\}, \tilde{P}\times\{1\} = \{(1,1,1)\}$ e $\tilde{P}^-\times\{1\} = \{(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1)\}$. A última álgebra-$\sigma$ é tirada de $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3$ e é tal que o correspondente espaço mensurável, atendendo ao teorema 16, fica com a decomposição irredutível $D = \{\{(1,1,1)\}, \{(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1)\}, \{(1,1,2),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,2)\}\}$ e assim fica com $2^3 = 8$ conjuntos, isso atendendo ao teorema 18. Reconhecemos então que

$$(K_1 \dot{\times} K_2) \dot{\times} K_3 \neq K_1 \dot{\times} K_2 \dot{\times} K_3$$

o que, em face do teorema 34, só é possível por haver classes-factores que não são classes geradoras arredondadas.

Exercício 63. Dados os espaços-factores $\Omega_n = \{1,2,3\}$ $(n = 1,2)$, a classe elementar G_1 formada pelo conjunto elementar $\{1\} \leqslant \Omega_1$ e a álgebra-σ $A_2 = \{O_2, \Omega_2, \{1\}, \{1\}^-\}$ tirada de Ω_2, designe por A_1 a álgebra-σ G_1^o gerada por G_1 (que não é classe geradora arredondada) e mostre que a propriedade associativa da multiplicação de classes falha neste caso, quer dizer que falha a igualdade entre produtos de classes $G_1 \dot{\times} A_2 = A_1 \dot{\times} A_2$. Quantos conjuntos há em cada um dos produtos referidos?

§ 19 — COMPLEMENTOS À MULTIPLICAÇÃO DE CLASSES

1. Produto dum número finito de álgebras

Um caso particular importante da multiplicação de classes conducente a uma álgebra-σ é o caso em que os factores são todos álgebras e formam uma colecção intransnumerável. Mais tarde veremos que o caso em causa é básico para o estudo da chamada multiplicação de medidas formando uma infinidade numerável ou em número finito e superior a 1. Para já, vamos considerar separadamente dois subcasos, o da multiplicação dum número finito de álgebras e o da multiplicação duma infinidade numerável de álgebras. Para começar, vamos lembrar o corolário 33' e vamos juntar o

Teorema 35. «Dados os espaços-factores Ω_n, em número finito e superior a 1, faça-se corresponder a cada n uma álgebra K_n de conjunto genérico $K_n \leqslant \Omega_n$. Seja K a classe dos conjuntos, contidos em $\underset{n}{\times}\, \Omega_n$, que podem obter-se *somando um número finito de produtos* $\underset{n}{\times}\, K_n$. Então, K é uma álgebra geradora da álgebra-σ igual ao produto $\underset{n}{\dot{\times}}\, K_n$.»

Demonstração. Seja P a classe formada pelos produtos $\underset{n}{\times}\, K_n$ possíveis e seja A a álgebra-σ $P^{\circ} = \underset{n}{\dot{\times}}\, K_n$ da fórmula 58). Então, a definição da classe K e o resultado 54b) mostram que $P \leqslant K \leqslant A$.

Logo o resultado 56d) prova que a álgebra-σ K° (gerada por K) se identifica com a álgebra-σ A. Nesta conformidade, só falta provar que a classe não-vazia K é uma álgebra, coisa esta que faremos por uma forma que facilite a adaptação ao caso da multiplicação duma infinidade numerável de álgebras.

Sabemos que n percorre valores naturais e consecutivos $1,2,\dots,N < +\infty$. Posto isso, escolhidos arbitrariamente $Q < +\infty$ produtos $\underset{n}{\times} K_{n,q}(q = 1,2,\dots,Q)$ tais que, seja qual for n, o factor $K_{n,q}\varepsilon K_n$ para cada q, então a convenção

$$S = \underset{q}{V} (\underset{n}{\times} K_{n,q}),$$

a fórmula 9a), o recurso ao exemplo 12 sucessivamente para $q = 1,2,\dots,Q$, a substituição de A_{n,p_n} por $K_{n,q,p_{n,q}}$, as convenções $K_{n,q,1} = K^{-}_{n,q}$ e $K_{n,q,2} = K_{n,q}$ e a fórmula 31'*) — com $p_{n,q}$ em lugar de $p_n(n = 1,2,\dots,N)$ e com $\dot{\Sigma}^*$ que omite a parcela correspondente a $p_{1,q} = \dots = p_{N,q} = 2$ — são incidências que conduzem à relação

$$S^{-} = \underset{q}{\Lambda} (\underset{n}{\times} K_{n,q})^{-} =$$

$$= \underset{q}{\Lambda} [\underset{1 \leqslant p_{1,q},\dots,p_{N,q} \leqslant 2}{\dot{\Sigma}^*} (K_{1,q,p_{1,q}} \times \dots \times K_{N,q,p_{N,q}})],$$

onde, sejam quais forem n e q, vale $K_{n,q,2} = K_{n,q}\varepsilon K_n$ e, atendendo à definição de álgebra, vale também $K_{n,q,1} = K^{-}_{n,q}\varepsilon K_n$. Então, a fórmula 13'), a convenção de $\dot{\Sigma}^{**}$ omitir os Q jogos de índices $p_{1,1} = \dots = p_{N,1} = 2, \dots, p_{1,Q} = \dots = p_{N,Q} = 2$, a fórmula 33), a propriedade 53b) das álgebras e a definição da classe K conduzem à nova relação

$$S^{-} = \underset{1 \leqslant p_{1,1},\dots,p_{N,1},\dots,p_{1,Q},\dots,p_{N,Q} \leqslant 2}{\dot{\Sigma}^{**}} [(K_{1,1,p_{1,1}} \times \dots \times K_{N,1,p_{N,1}}) \Lambda \dots$$

$$\dots \Lambda (K_{1,Q,p_{1,Q}} \times \dots \times K_{N,Q,p_{N,Q}})] =$$

$$= \underset{1 \leqslant p_{1,1},\dots,p_{N,1},\dots,p_{1,Q},\dots,p_{N,Q} \leqslant 2}{\dot{\Sigma}^{**}} [(K_{1,1,p_{1,1}} \Lambda \dots \Lambda K_{1,Q,p_{1,Q}}) \times \dots$$

$$\dots \times (K_{N,1,p_{N,1}} \Lambda \dots \Lambda K_{N,Q,p_{N,Q}})]\varepsilon K. \qquad (62)$$

Nesta conformidade: como qualquer conjunto $K \varepsilon \mathcal{K}$ é um conjunto S especial em que a união de produtos tem a particularidade de ser uma soma, então a associatividade e a comutatividade da união mostram que, escolhidos arbitrariamente conjuntos pertencentes a $\mathcal{K}$ e em número finito, a sua união é um dos conjuntos S e, consequentemente, tem o complemento $S^{-} \varepsilon \mathcal{K}$. Logo, por um lado, o caso de haver uma só parcela na união referida em último lugar faz com que $K \varepsilon \mathcal{K}$ implique $K^{-} \varepsilon \mathcal{K}$ e, por outro lado, o caso de haver duas parcelas na dita união faz com que $K' \varepsilon \mathcal{K}$ e $K'' \varepsilon \mathcal{K}$ implique $(K' \vee K'')^{-} \varepsilon \mathcal{K}$, donde $K' \vee K'' = [(K' \vee K'')^{-}]^{-} \varepsilon \mathcal{K}$. Fica assim provado que a classe $\mathcal{K}$ cumpre com as exigências da definição duma álgebra, c. q. d.

Exercício 64. Calcule o número de parcelas de cada um dos somatórios da fórmula 62) contando, para o efeito, com as parcelas eventualmente vazias.

2. Produto de álgebras dispostas em sucessão

Mesmo que o somatório da fórmula 62) se adapte ao caso de haver infinitos valores n, a inferência $S^{-} \varepsilon \mathcal{K}$ deixa de ser válida. Por isso, o caso duma infinidade numerável de factores $\mathcal{K}_n$ coincidentes com álgebras tem de ser tratado por uma via diferente da anterior, a qual, vê-lo-emos, exibe a curiosidade de recorrer apenas a produtos com um número finito de factores K_n, desde que se abstraia de factores iguais aos respectivos espaços Ω_n.

Temos o

Teorema 36. «Dada uma sucessão de espaços-factores Ω_n (n = = 1,2,3, ...), faça-se corresponder a cada n uma álgebra $\mathcal{K}_n$ de conjunto genérico $K_n \leqslant \Omega_n$. Seja $\tilde{\mathcal{K}}$ a classe formada pelos conjuntos, contidos em $\underset{n}{\times} \Omega_n$, que podem obter-se *somando um número finito de produtos* $\underset{n}{\times} K_n$ *especiais,* a saber sujeitos à condição de cada um deles admitir apenas um número finito de factores $K_n \neq \neq \Omega_n$. Então, $\tilde{\mathcal{K}}$ é uma álgebra geradora da álgebra-σ igual a $\underset{n}{\dot{\times}} \mathcal{K}_n$.»

Demonstração. Comecemos por notar que cada $\mathcal{K}_n$ é uma álgebra, pelo que $\Omega_n \varepsilon \mathcal{K}_n$ e $O_n \varepsilon \mathcal{K}_n$, isto para cada n. Agora, escolhidos arbitrariamente $Q < +\infty$ produtos $\times_n K_{n,q}(q = 1,2,\ldots,Q)$ especiais, de acordo com a condição posta no enunciado, tem-se, seja qual for o número natural n, a relação $K_{n,q} \varepsilon \mathcal{K}_n$ para cada q e, seja qual for q, a relação $K_{n,q} = \Omega_n$ para $n \geqslant N(q)$ (com N(q) natural e dependente da escolha de q). Se fizermos $\sup_q N(q) = N$, será N finito e ter-se-á, seja qual for q, a relação $K_{n,q} = \Omega_n$ para $n \geqslant N$. Pondo agora

$$S = \bigvee_q (\times_n K_{n,q}),$$

ou vale $N = 1$ e S coincide com o espaço-produto $\times_n \Omega_n = \Omega$ ou vale $N > 1$ e a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos permite escrever

$$S = \bigvee_q [K_{1,q} \times \ldots \times K_{N-1,q} \times (\times_{n \geqslant N} \Omega_n)],$$

onde S é um conjunto do género usado na demonstração do teorema 35, conjunto esse não só contido no espaço-produto $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{N-1} \times \Omega'$ através da convenção $\Omega' = \times_{n \geqslant N} \Omega_n$, como também dotado da particularidade de todos os Q factores $K_{N,q} = K'_q \leqslant \Omega'$ coincidirem com Ω'. Posto isso, o caso $N = 1$ dá directamente $S^- = \Omega^- = O_1 \times (\times_{n>1} \Omega_n) \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}$. Por outro lado, o caso $N > 1$ dá uma fórmula decalcada de 62), onde o último factor da parcela genérica do terceiro membro pertence à classe $\{O', \Omega'\}$ tirada de Ω', ou por ter conjuntos secantes todos iguais a Ω' — coincidindo então com $\Omega' = \times_{n \geqslant N} \Omega_n$ — ou por ter algum conjunto secante igual a $\Omega'^- = O'$ — coincidindo então com $O' = O_N \times (\times_{n>N} \Omega_n)$. Em qualquer dos casos, reconhece-se assim que $S^- \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}$ e a análise pode prosseguir nos termos da demonstração do teorema 35, com $\mathcal{K}$, K, K' e K'' substituídos respectivamente por $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ e $\tilde{K}''$. Nesta conformidade, concluímos que a classe não-vazia $\tilde{\mathcal{K}}$ cumpre com as exigências da definição duma álgebra.

Chegados a este ponto, só nos falta provar que a álgebra $\tilde{K}$ é geradora da álgebra-σ $\dot{\underset{n}{\times}} K_n = A = P^o$ gerada pela classe P que se compõe de todos os produtos $\underset{n}{\times} K_n = P$ possíveis (mesmo que deixem de ser especiais). Ora, a definição do conjunto genérico $\tilde{K}\varepsilon\tilde{K}$, como soma de produtos P especiais e em número finito, mostra que $\tilde{K} \leqslant A$, pelo que os resultados 56c) e b) conduzem a $\tilde{K}^o \leqslant A$, só restando deduzir a relação oposta $A \leqslant \tilde{K}^o$.

Escolhidos arbitrariamente conjuntos $K_n \varepsilon K_n$, um por cada n, então, seja qual for n, o cilindro $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1} \times K_n \times \Omega_{n+1} \times \ldots$ de base K_n pertence a $\tilde{K}$, pelo que a fórmula 44) e o resultado 54b) mostram que $\underset{n}{\times} K_n = \underset{n}{\Lambda} (\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1} \times K_n \times \Omega_{n+1} \times \ldots) \varepsilon \tilde{K}^o$. Concluímos que $P \leqslant \tilde{K}^o$, donde $A \leqslant \tilde{K}^o$, c. q. d.

3. Corte num produto de álgebras-σ e base dum produto de álgebras-σ

Vamos prosseguir este parágrafo, examinando o relacionamento entre as operações estudadas no § 18 e as estudadas no § 16 e no § 17. Em primeiro lugar, temos o

Teorema 37. «Dados o espaço-produto $\underset{t}{\times} \Omega_t = \Omega$, o produto parcial $\underset{t*}{\times} \Omega_{t*} = \Omega^* \neq \Omega$ e o espaço Ω^{**} marginal de Ω com respeito a Ω^*, faça-se corresponder a cada t uma álgebra-σ A_t tirada de Ω_t e escolha-se arbitrariamente um ponto $\bar{\omega}^{**} \varepsilon \Omega^{**}$. Então, a álgebra-$\sigma$ [ou o espaço mensurável] igual ao produto $\dot{\underset{t}{\times}} A_t$ [ou $\dot{\underset{t}{\times}} (\Omega_t, A_t)$] é cortada [ou cortado] por $\bar{\omega}^{**}$ segundo a álgebra-σ [ou o espaço mensurável] igual ao produto parcial $\dot{\underset{t*}{\times}} A_{t*}$ [ou $\dot{\underset{t*}{\times}} (\Omega_{t*}, A_{t*})$].»

Demonstração. a) Para começar, a relação 49a), devidamente adaptada, mostra que $\Omega/\bar{\omega}^{**} = \Omega^*$. Por outro lado, não só a relação 60) dá $\dot{\underset{t}{\times}} (\Omega_t, A_t) = (\underset{t}{\times} \Omega_t, \dot{\underset{t}{\times}} A_t)$ e dá semelhantemente $\dot{\underset{t*}{\times}} (\Omega_{t*}, A_{t*}) = (\underset{t*}{\times} \Omega_{t*}, \dot{\underset{t*}{\times}} A_{t*})$, como também a definição de corte feito por $\bar{\omega}^{**}$ no primeiro dos quatro produtos precedentes dá $(\dot{\times}_{t}(\Omega_t, A_t))/\bar{\omega}^{**} = ((\times_{t}\Omega_t)/\bar{\omega}^{**}, (\dot{\times}_{t} A_t)/\bar{\omega}^{**}) = (\times_{t*}\Omega_{t*}, (\dot{\times}_{t} A_t)/\bar{\omega}^{**})$.

Em face do exposto, as duas versões da tese ficarão provadas se conseguirmos deduzir a igualdade entre classes $(\dot{\times}_{t} A_t)/\bar{\omega}^{**} = $

$= \dot{\times}_{t*} A_{t*}$.

b) Seja qual for t, vamos designar por A_t o conjunto genérico pertencente à álgebra-σ A_t. Então, de acordo com a fórmula 58), a álgebra-σ A, igual ao produto $\dot{\times}_{t} A_t$, é a álgebra-σ P^o gerada pela classe P que se compõe dos produtos $\times_{t} \mathrm{A}_t = \mathrm{P}$ possíveis. Atendendo ao corolário 10', podemos escolher $\mathrm{A}_t = \Omega_t$ para todo o $t \neq t^*$ conservando, porém, a arbitrariedade dos conjuntos $\mathrm{A}_{t*} \varepsilon A_{t*}$. Este procedimento faz-nos cair numa subclasse $C \leqslant P$ que é formada por cilindros com base em Ω^* e que, atendendo ao exemplo 26, é cortada por $\bar{\omega}^{**}$ segundo a classe formada pelos produtos $\times_{t*} \mathrm{A}_{t*}$ possíveis, quer dizer segundo a classe de produtos usualmente tomada para a classe geradora da álgebra-σ igual a $\dot{\times}_{t*} A_{t*}$. Como o resultado 56a) dá $P \leqslant A$ e logo $C \leqslant A$, a relação 49d) conduz a $A/\bar{\omega}^{**} \geqslant C/\bar{\omega}^{**}$, pelo que o teorema 25 (devidamente adaptado) e os resultados 56c) e b) provam que se verifica a relação $A/\bar{\omega}^{**} \geqslant \dot{\times}_{t*} A_{t*}$. Portanto, a nossa demonstração fica completada se conseguirmos deduzir a relação entre classes $A/\bar{\omega}^{**} \leqslant \dot{\times}_{t*} A_{t*}$.

c) Seja $\tilde{A}$ a subclasse de A formada pelos conjuntos $\mathrm{A} \varepsilon A$ tais que $\mathrm{A}/\bar{\omega}^{**} \varepsilon \dot{\times}_{t*} A_{t*}$. Ora, escolhido arbitrariamente um conjunto $\mathrm{P} \varepsilon P$, o exemplo 27 (devidamente adaptado) ensina-nos que o corte $\mathrm{P}/\bar{\omega}^{**}$ ou é igual a $O^* \leqslant \Omega^*$ ou é igual a $\times_{t*} \mathrm{A}_{t*}$ e, portanto, nunca deixa de pertencer à álgebra-σ $\dot{\times}_{t*} A_{t*}$, facto este que acarreta a relação $P \leqslant \tilde{A}$.

Por outro lado, não só a hipótese $\mathrm{A} \varepsilon \tilde{A}$, a relação 50a) e o corolário 10' dão $\mathrm{A}^-/\bar{\omega}^{**} = (\mathrm{A}/\bar{\omega}^{**})^- \varepsilon \dot{\times}_{t*} A_{t*}$, como também a hipótese

$A_n \varepsilon \tilde{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, a relação 50b) e o corolário 10' dão $(\overset{V}{\underset{n}{}} A_n)/\bar{\omega}^{**} = \overset{V}{\underset{n}{}} (A_n/\bar{\omega}^{**}) \varepsilon \underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*}$. Concluímos assim que a classe $\tilde{A}$ cumpre com as exigências da definição duma álgebra-σ, além de satisfazer à relação $P \leqslant \tilde{A} \leqslant A = P^o$. Logo os resultados 56d) e b) conduzem à igualdade $A = \tilde{A}^o = \tilde{A}$. Daí e da definição de $\tilde{A}$ decorre a nova relação $A/\bar{\omega}^{**} \leqslant \underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*}$, c. q. d.

O teorema 37 relaciona as operações analisadas no § 16 e no § 18. Se quisermos comparar entre o § 17 e o § 18, então torna-se oportuno o

Corolário 37'. «Considerem-se os espaços Ω e Ω^* e as álgebras-σ A_t referidos no enunciado do teorema 37. Então, a álgebra-σ [ou o espaço mensurável] igual ao produto $\underset{t}{\dot{\times}} A_t$ [ou $\underset{t}{\dot{\times}} (\Omega_t, A_t)$] tem uma base em Ω^* que coincide com o produto parcial $\underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*}$ [ou $\underset{t*}{\dot{\times}} (\Omega_{t*}, A_{t*})$].»

Demonstração. a) Vimos, no princípio da demonstração do teorema 37, que $\underset{t*}{\dot{\times}} (\Omega_{t*}, A_{t*}) = (\Omega^*, \underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*})$. Por outro lado, sabemos, pela definição dada a seguir ao corolário 27', que a base (em Ω^*) de $\underset{t}{\dot{\times}} (\Omega_t, A_t) = (\Omega, A)$ é o espaço mensurável $(\Omega^*, C^*(A))$, onde $C^*(A)$ é a base de $C(A)$ ou seja da chamada subclasse cilíndrica de $A = \underset{t}{\dot{\times}} A_t$, base essa que por definição é a base da própria classe A. Perante o exposto, as duas versões da tese ficarão provadas se conseguirmos deduzir a igualdade entre classes $C^*(A) = \underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*}$, igualdade esta que, em face do teorema 37, é equivalente a $C^*(A) = A/\bar{\omega}^{**}$, com $\bar{\omega}^{**} \varepsilon \Omega^{**}$ de escolha arbitrária.

b) Ora a classe cilíndrica C, introduzida em b) da demonstração do teorema 37, é tal que $C \leqslant C(A) \leqslant A$, pelo que a relação 49d) dá, por escolha dum $\bar{\omega}^{**}$, a nova relação $C/\bar{\omega}^{**} \leqslant C(A)/\bar{\omega}^{**} \leqslant A/\bar{\omega}^{**}$, onde, não o esqueçamos, $C/\bar{\omega}^{**}$ é uma classe geradora da álgebra-σ $\underset{t*}{\dot{\times}} A_{t*}$, esta igual a $A/\bar{\omega}^{**}$ graças ao teorema 37. Como os teoremas 27 e 25 obrigam $C(A)/\bar{\omega}^{**}$ a ser uma álgebra-σ, os resultados 56d) e b) conduzem à igualdade $C(A)/\bar{\omega}^{**} = A/\bar{\omega}^{**}$.

Por outro lado, o exemplo 26 dá $C(A)/\bar{\omega}^{**} = C^*(A)$ e obtemos assim a igualdade pretendida sob a forma $C^*(A) = A/\bar{\omega}^{**}$, c. q. d.

Posto isso, recordemos a definição de conjunto mensurável, dada no n.º **5** do § 11, a qual é relativa no sentido de se encontrar vinculada ao espaço mensurável em que se trabalha. Neste contexto, dada a classe formada pelos conjuntos-produtos tirados dum produto de espaços mensuráveis, pretendemos relacionar a mensurabilidade desses conjuntos com as mensurabilidades dos seus factores, objectivo esse que vamos alcançar por recurso ao teorema 37 e que vamos referir através do

Corolário 37". «Considerem-se os espaços-factores Ω_t e as álgebras-σ A_t referidos no enunciado do teorema 37. Então, um conjunto não-vazio e da forma $\underset{t}{\times} K_t$, com $K_t \leqslant \Omega_t$ para cada t, será mensurável em relação a $(\underset{t}{\times} \Omega_t, \underset{t}{\dot{\times}} A_t)$ se e só se cada um dos seus factores K_t for mensurável em relação ao respectivo (Ω_t, A_t).»

Demonstração. Vimos, em b) do n.º **5** do § 7 e um pouco antes da fórmula 35), que $\underset{t}{\times} K_t \neq O \leqslant \underset{t}{\times} \Omega_t = \Omega$ se e só se $K_t \neq O_t \leqslant \Omega_t$ para cada t admissível. Se supusermos que, seja qual for t, o conjunto $K_t \neq O_t$ é um conjunto mensurável A_t em relação ao respectivo (Ω_t, A_t), então $\underset{t}{\times} A_t$ pertence à classe geradora da álgebra-σ $\underset{t}{\dot{\times}} A_t = A$ e, portanto, é um conjunto mensurável em relação a (Ω, A). Por isso, só falta provar que a mensurabilidade de $\underset{t}{\times} K_t = K \neq O$ em relação a (Ω, A) obriga cada um dos factores $K_t \neq O_t$ a ser um conjunto mensurável A_t em relação ao respectivo (Ω_t, A_t), prova essa que faremos por redução ao absurdo.

Suponhamos então que $O \neq K \varepsilon A$. Se existisse uma determinação τ do índice t tal que $K_\tau \varepsilon A_\tau^-$, igualávamos o espaço Ω^* do teorema 37 ao produto com o factor único Ω_τ, pelo que o dito teorema 37 dava $A/\bar{\omega}^{**} = \underset{t=\tau}{\dot{\times}} A_t = A_\tau$, isto com qualquer $\bar{\omega}^{**} \varepsilon \Omega^{**} = \underset{t \neq \tau}{\times} \Omega_t$. Por outro lado, o exemplo 27 (devidamente adaptado) mostra que, escolhido um $\bar{\omega}^{**} \varepsilon \underset{t \neq \tau}{\times} K_t \neq O^{**} \leqslant \Omega^{**}$, vale a igualdade $K/\bar{\omega}^{**} = K_\tau$. Mas, como se escolheu $K \varepsilon A$, resultava $K/\bar{\omega}^{**} \varepsilon A/\bar{\omega}^{**}$; logo $K_\tau \varepsilon A_\tau$, uma conclusão incompatível com a hipótese $K_\tau \varepsilon A_\tau^-$, c. q. d.

4. Cilindros e a factorização de álgebras-σ

Qualquer álgebra-σ tirada dum espaço-produto com mais do que um factor dá lugar a um produto de álgebras-σ tirado do mesmo espaço-produto, isto em conformidade com o

Teorema 38. «Dada a álgebra-σ A tirada do espaço-produto $\underset{t}{\times} \Omega_t$ com pelo menos dois factores, o produto das bases de A nos diversos espaços Ω_t é a álgebra-σ A' que é gerada pela classe que se compõe de todas as intersecções da forma $\underset{t}{\wedge} C_t$, onde, seja qual for a escolha de t, o símbolo C_t representa o cilindro genérico pertencente a A e com base em Ω_t.»

Demonstração. Sabemos, pelo corolário 27', que A tem base A_t em qualquer um dos Ω_t, base esta que é uma álgebra-σ, cujo conjunto genérico vamos designar por A_t. Ora, seja qual for t, há correspondência recíproca entre os A_t e os cilindros $C_t \varepsilon A$ com base A_t. Logo a definição de produto de álgebras-σ e a fórmula 44) mostram que a álgebra-σ $\dot{\underset{t}{\times}} A_t = A'$ é gerada pela classe dos conjuntos $\underset{t}{\times} A_t = \underset{t}{\wedge} C_t$ possíveis, c. q. d.

Observação. Comparando o corolário 37' com o teorema 38, vê-se que o significado dos símbolos A e A_t ficou alargado no sentido de cada A_t se constituir numa base de A, mesmo que não seja um factor de A.

Posto isso, vamos examinar mais de perto as álgebras-σ A e $A' = \dot{\underset{t}{\times}} A_t$ referidas a propósito do teorema 38.

Em primeiro lugar, vamos referir o chamado *teorema de caracterização (e unicidade) da factorização duma álgebra-σ em álgebras-σ* ou seja o

Teorema 39. «Dada a álgebra-σ A, definida no espaço-produto $\underset{t}{\times} \Omega_t$ (com dois ou mais factores) e factorizável em álgebras-σ A'_t tiradas dos Ω_t, então verifica-se a igualdade entre A e a álgebra-σ A' do teorema 38 e, além disso, não existe qualquer outra factorização de A em álgebras-σ tiradas dos Ω_t.»

Demonstração. A hipótese $A = \dot{\times}_{t} A'_t$ e o corolário 37' (devidamente transcrito) implicam que, seja qual for a determinação τ do índice t, a base A_τ de A em Ω_τ coincida com $\dot{\times}_{t=\tau} A'_t = A'_\tau$ (veja-se o fim do n.º 1 do § 18). Nesta conformidade, obtemos a igualdade

$$A' = \dot{\times}_{t} A_t = \dot{\times}_{t} A'_t = A \tag{63}$$

ou seja a igualdade correspondente à primeira parte da tese. Não só concluímos que os factores de A são as suas bases nos espaços Ω_t, como também esta caracterização dos factores de A prova a unicidade da factorização que está em causa, c. q. d.

Partindo do teorema 39, é fácil chegar ao seguinte *critério de factorizabilidade:*

Corolário 39'. «Dado o espaço-produto $\Omega = \times_{t} \Omega_t$ com pelo menos dois factores, então qualquer álgebra-σ A tirada de Ω será factorizável em álgebras-σ tiradas dos Ω_t se e só se A for igual à álgebra-σ A' gerada pela classe das intersecções da forma $\wedge_{t} C_t$, onde, seja qual for t, o símbolo C_t representa o cilindro genérico pertencente a A e com base em Ω_t.»

Demonstração. A condição necessária e suficiente do enunciado não é senão a igualdade $A' = A$ da fórmula 63). A necessidade da condição foi vista no teorema 39. Por outro lado, caso se verifique a igualdade referida, obtemos a relação $A = A' = \dot{\times}_{t} A_t$ e fica assegurada a factorizabilidade que está em causa, c. q. d.

Observação. Caso haja um conjunto-produto não-vazio que pertença a A e que não seja da forma $\wedge_{t} C_t$, com $C_t \varepsilon A$ para cada t, então o corolário 37", aplicado ao espaço mensurável (Ω, A'), impede que se verifique a igualdade $A' = A$. Que esta igualdade pode falhar mesmo sem o impedimento referido, é um facto que o leitor pode comprovar se examinar o caso em que $\Omega_t = \{1,2\}$ $(t = 1,2)$, em que o espaço $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ e em que a álgebra-σ $A = \{\Omega, O_\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{A}^-\}$, nas três versões: $\mathrm{A} = \{(1,1)\}$; $\mathrm{A} = \{(1,1),(2,2)\}$; $\mathrm{A} = \{(1,1),(1,2)\}$.

Talvez valha a pena chamar a atenção do leitor para o relacionamento entre o corolário 37'' e a unicidade da factorização do teorema 39.

Posto isso, seja qual for a determinação τ do índice t, a intersecção genérica $\underset{t}{\wedge} C_t$ do teorema 38 (e do corolário 39') reduz-se a C_τ, desde que se ponha $C_t = \Omega$ para $t \neq \tau$. Logo, se designarmos por *G'* a classe geradora de *A'* usada no teorema 38, então *G'* não só se compõe dos conjuntos $\underset{t}{\wedge} C_t$ acima referidos, como também contém a classe *G''*, formada por todos os cilindros C_t pertencentes a *A* e com base contida nalgum espaço-factor Ω_t (onde se supõe que t percorre o seu campo de variação). † Nesta conformidade, a convenção de representar por *A''* a álgebra-σ gerada por *G''* conduz, via fórmula 56), à relação

$$A' \geqslant A'' \leqslant A, \tag{63'}$$

válida para qualquer álgebra-σ *A* tirada de $\Omega = \underset{t}{\times} \Omega_t$, onde o corolário 39' impõe $A' \neq A$ se e só se *A* deixar de ser factorizável em álgebras-σ tiradas dos Ω_t.

Segue um caso particular importante que reforça o *papel fundamental desempenhado pelos cilindros em questões de factorização* do tipo aqui examinado. Ei-lo:

Teorema 40. «Dado o espaço-produto $\Omega = \underset{t}{\times} \Omega_t$, com factores em número superior a 1 e formando uma família *intransnumerável,* então não só a fórmula 63') se simplifica para

$$A' = A'' \leqslant A, \tag{63''}$$

como também qualquer álgebra-σ *A* tirada de Ω será factorizável em álgebras-σ tiradas dos Ω_t se e só se ela for igual à álgebra-σ *A''*, esta gerada pela classe que se compõe de todos os cilindros pertencentes a Ω e com base contida nalgum Ω_t.»

---

† O texto refere-se ao caso em que se trabalha com vários espaços marginais Ω_t, um para cada t, e *não se refere* ao caso em que se trabalha com um espaço marginal fixo (compare-se com o teorema 29).

Demonstração. Retomando as classes G' e G'' do texto que precede a fórmula 63'), reconhecemos que a intransnumerabilidade admitida no enunciado e a propriedade 54b) implicam $G'' \leqslant G' \leqslant \leqslant A''$, donde, atendendo às propriedades 56d) e b), a igualdade $A'' = A'$, a qual transforma 63') em 63''). Logo a condição necessária e suficiente de factorizabilidade do corolário 39', quer dizer a igualdade 63), pode assumir o aspecto $A'' = A$, este equivalente à parte final da nossa tese, c. q. d.

Exercício 65. Desenvolva o seguinte esquema:

a) É dado o espaço-produto $\Omega(\omega) = \underset{t \varepsilon T}{\times} \Omega_t(\omega_t)$, onde se supõe transnumerável a família $T(t)$ e onde se admite a existência duma subfamília transnumerável $\overline{T}(\overline{t})$ tal que nenhum espaço-factor $\Omega_{\overline{t}}$ se reduza a um só ponto.

b) Seja A a álgebra-σ (tirada de Ω e) gerada pela classe G que é formada por *todos* os cilindros C_t que tenham base contida nalgum espaço-factor Ω_t.

c) Seja qual for $t \varepsilon T$, a base de A em Ω_t é a álgebra-σ máxima $A_t = 2^{\Omega_t}$.

d) Relacionando o exposto com o texto que precede a fórmula 63'), obtém-se $G = G''$, donde $A = A''$.

e) É uma álgebra-σ a classe C que se compõe de *todos* os cilindros $C \leqslant \Omega$ com base contida nalgum espaço-produto parcial da forma $\underset{n}{\times} \Omega_{t_n} (n = 1,2,3, \ldots ;\ t_n \varepsilon T)$ (onde os factores Ω_{t_n} constituem uma família intransnumerável e logo, escolhido arbitrariamente um $C \varepsilon C$, o ponto genérico $\omega \varepsilon C$ depende quando muito das coordenadas de índices t_n, quer dizer apenas de coordenadas formando uma família intransnumerável).

f) Não há nenhum conjunto elementar (contido em Ω) que pertença à álgebra-σ C.

g) Verifica-se a relação $G \leqslant A \leqslant C$.

h) Não há nenhum conjunto elementar (contido em Ω) que pertença à algebra-σ A.

i) A álgebra-σ $A' = \dot{\times}_t A_t = \dot{\times}_t 2^{\Omega_t}$ correspondente ao teorema 38 é tal que lhe pertencem todos os conjuntos elementares contidos em Ω (a fórmula 35") pode ajudar).

j) Vale a relação $A'' = A$ propriamente contido em A', pelo que *a condição $A'' = A$ é insuficiente para a factorizabilidade duma álgebra-σ A em álgebras-σ tiradas dos espaços-factores Ω_t no caso de estes formarem uma família transnumerável.*

k) Sendo $\tilde{A}$ uma álgebra-σ tirada de Ω, atribuam-se a $\tilde{A}'$ e a $\tilde{A}''$ os significados análogos aos atribuídos respectivamente a A' e a A'' com respeito a A.

l) Escolha-se $\tilde{A} = A'$.

m) Seja qual for $t \varepsilon T$, a base de $\tilde{A}$ em Ω_t é a álgebra-σ $\tilde{A}_t = A_t$.

n) Verifica-se a igualdade $A' = \tilde{A} = \tilde{A}'$.

o) Sendo $\tilde{G}''$ obtido de $\tilde{A}$ do mesmo modo que se obteve G'' de A, vale $\tilde{G}'' = G''$; logo vale $\tilde{A}'' = A''$.

p) Resulta a relação $\tilde{A}''$ propriamente contido em $\tilde{A} = \tilde{A}'$, pelo que *a condição $A'' = A$* (transcrita de $\tilde{A}'' = \tilde{A}$) *é desnecessária para a factorizabilidade duma álgebra-σ A em álgebras-σ tiradas dos espaços-factores Ω_t no caso de estes formarem uma infinidade transnumerável.*

§ 20 — ESPAÇOS DE BOREL MULTIDIMENSIONAIS

1. Borelianos multidimensionais

Seja T uma família de elemento genérico t tal que as determinações de t sejam pelo menos duas e se sujeitem a um dispositivo de entrada na família. Recordemos as convenções estabelecidas no n.º **1** do § 14, façamos corresponder a cada $t \varepsilon T$ uma recta de Borel $[X_t(x_t), \mathcal{B}_t(B_t)]$ — abreviadamente $(X_t, \mathcal{B}_t)$ — e consideremos, de acordo com a fórmula 60), o espaço mensurável igual ao produto

$$\dot{\underset{t}{\times}} (X_t, \mathcal{B}_t) = (\underset{t}{\times} X_t, \dot{\underset{t}{\times}} \mathcal{B}_t) = (X, \mathcal{B}). \tag{64}$$

Vimos, no último trecho do n.º **5** do § 7, que $\underset{t}{\times} X_t = X$ é um *espaço real multidimensional,* quer dizer a duas ou mais dimensões, *cujo ponto genérico* $x = (x_t, t \varepsilon T)$ *tem as coordenadas* x_t, cada uma das quais é susceptível de assumir qualquer valor real e finito. Por outro lado, vimos, um pouco antes da fórmula 60), que a álgebra-σ $\dot{\underset{t}{\times}} \mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ é gerada pela classe dos produtos $\underset{t}{\times} B_t =$ $= P$ possíveis, quer dizer dos produtos de borelianos lineares disponíveis, classe essa que vamos representar pelo símbolo $\mathcal{P}$.

Posto isso, vamos chamar a $\mathcal{B}$ *álgebra de Borel multidimensional,* vamos chamar ao conjunto genérico $B \varepsilon \mathcal{B}$ *conjunto de Borel* ou *boreliano multidimensional* e, por fim, vamos chamar a $(X, \mathcal{B})$

espaço de Borel multidimensional. Em qualquer dos casos, teremos um ente matemático a $D \leqslant +\infty$ *dimensões* se e só se o número de factores envolvidos for igual a D. Caso se tenha $D = 3$, podemos classificar o respectivo ente boreliano como ente *corrente.* Por outro lado, se $D = 2$, é muito frequente usarem-se as designações de *álgebra de Borel plana, conjunto de Borel* ou *boreliano plano* e *plano de Borel,* este identificado com o espaço de Borel a duas dimensões.

Atendendo ao corolário 33' e à observação posta no fim do n.º **4** do § 18, podemos afirmar que *a multiplicação conducente a B e a conducente a* (X,B) *são ambas operações associativas.*

Exemplo 63. Suponhamos que a família T é formada pelos números (t ou) $n = 1,2,3$ e recordemos a nota posta no decurso da demonstração do corolário 33'. Então, a fórmula 64) e a associatividade supracitada garantem que, sendo (X,B) o espaço de Borel corrente, se verifica a igualdade

$$(X,B) = (X_1 \times X_2 \times X_3, B_1 \dot{\times} B_2 \dot{\times} B_3) =$$

$$= (X' \times X_3, B' \dot{\times} B_3) = (X', B') \dot{\times} (X_3, B_3),$$

onde (X',B') é o plano de Borel igual a $(X_1 \times X_2, B_1 \dot{\times} B_2) = (X_1,B_1) \dot{\times} (X_2,B_2)$. Claro que haverá outra igualdade do mesmo estilo para o caso de se associarem os dois últimos factores em lugar dos dois primeiros.

Muitas características da recta de Borel transitam para qualquer espaço de Borel multidimensional. Neste contexto, apresentemos o

Teorema 41. «Dado um espaço real multidimensional X, é boreliano contido em X todo o produto de borelianos lineares contido em X, todo o conjunto intervalar contido em X e todo o conjunto intransnumerável contido em X.»

Demonstração. Reportando-nos à fórmula 64), escolhamos arbitrariamente um produto $\underset{t}{\times} B_t = P \leqslant X$, onde $B_t \varepsilon B_t$ para cada t.

Como B é a álgebra-σ gerada pela classe dos produtos P possíveis, inferimos do resultado 56a) a relação $\underset{t}{\times} B_t \varepsilon B$, ficando assim provada a primeira parte da tese.

Escolhido arbitrariamente um intervalo multidimensional $I \leqslant X$, sabemos, dos n.^{os} **4** e **5** do § 7, que $I = \underset{t}{\times} I_t$ onde, seja qual for t, o conjunto $I_t \leqslant X_t$ é um intervalo linear. Mas, o teorema 19 dá $I_t \varepsilon B_t$ para cada t; assim concluímos que $I \varepsilon B$, de acordo com a segunda parte da tese.

Dado o conjunto elementar $\{x\} \varepsilon X$, com $x = (x_t, t \varepsilon T)$, sabemos, pela forma 35"), que $\{x\} = \underset{t}{\times} \{x_t\}$ e sabemos também, pelo teorema 19, que $\{x_t\} \varepsilon B_t$ para cada t. Então $\{x\} \varepsilon B$; logo, escolhido arbitrariamente um conjunto intransnumerável $K = \dot{\sum\limits_{x \varepsilon K}} \{x\} \leqslant X$, a definição de álgebra-σ faz com que $K \varepsilon B$, ficando assim provada a última parte da tese.

Exemplo 64. Vale a seguinte asserção: «Nenhum espaço de Borel multidimensional pode admitir alguma decomposição irredutível.» — Com efeito, podemos transcrever a dedução feita no exemplo 49, reinterpretando ou redimensionando x e **X** e atendendo ao facto de X ser um conjunto com potência não inferior à do contínuo.

Dado o espaço real $X = \underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} X_t$ multidimensional a $D < + \infty$ dimensões, de ponto genérico $x = (x_1, x_2, \dots, x_D)$, podemos retomar as convenções, o simbolismo e as considerações que antecedem o teorema 20, na parte relativa a conjuntos contidos em X (ou abertos ou fechados), sob a condição: de interpretarmos os intervalos envolvidos como multidimensionais a $D < + \infty$ dimensões, de acordo com o n.° **4** do § 7; de substituirmos o conjunto $X - R$ transnumerável e não-intervalar de c) do exemplo 50 pelo conjunto (nem aberto nem fechado) dos pontos x com alguma coordenada irracional; de identificarmos os *intervalos racionais abertos* com os intervalos da forma $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{a_t < x_t < b_t\}$ — estes borelianos pertencentes a $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\dot{\times}} B_t = B$ (em virtude do teorema 41) — particularizados de modo a serem *dependentes de* 2D *parâmetros racionais* a_t *e* $b_t > a_t$ e, por isso, constitutivos duma classe numerável, cujo elemento genérico vamos representar por J_n ($n = 1,2, 3, \dots$). Nesta conformidade, o teorema 20 adapta-se sob a forma do

Teorema 42. «Dado um espaço de Borel multidimensional a $D < +\infty$ dimensões, é boreliano (a D dimensões) qualquer conjunto aberto e qualquer conjunto fechado.»

Demonstração. Servem o simbolismo e a dedução usados na parte da demonstração do teorema 20 relativa ao espaço real $X(x)$ dado, agora multidimensional a $D < +\infty$ dimensões, com uma só ressalva: para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_D) \varepsilon A$ passamos a meter dois pontos interiores a J_x, um $a = (a_1, a_2, \dots, a_D)$ de coordenadas todas racionais e tais que $a_t < x_t$ para cada t e outro $b = (b_1, b_2, \dots, b_D)$ de coordenadas todas racionais e tais que $b_t > x_t$ para cada t; em seguida recorremos ao intervalo racional aberto

$$\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{a_t < x_t < b_t\}.$$

Exemplo 65. Considerem-se o plano real X de ponto genérico $x = (x_1, x_2)$ e, além disso, três números reais e finitos α_1, α_2 e β tais que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$. Então, são borelianos planos os três conjuntos K, K' e K'' que se obtêm sujeitando a expressão $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta$ a ser respectivamente nula, positiva e negativa. Com efeito, K' e K'' são abertos e logo borelianos planos, incidentemente disjuntos entre si e de K, e são tais que $K \dot{+} K' \dot{+} K'' = X$, pelo que a fórmula 18) e o teorema 10 obrigam $K = X - (K' \dot{+} K'')$ a ser também um boreliano plano.

2. Classes geradoras de B no caso da dimensionalidade finita

Seja qual for o espaço real multidimensional $X(x) = \underset{t}{\times} X_t(x_t)$ a $D \leqslant +\infty$ dimensões, vamos chamar *intervalo principal a* D *dimensões* (também *plano* se $D = 2$ e *corrente* se $D = 3$) a todo o intervalo, contido em X, que seja um produto (ao longo de t) com factores contidos nos X_t, todos eles coincidentes com intervalos principais lineares e, portanto, da forma $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ (a_t e $b_t \geqslant a_t$ ambos finitos). Atendendo ao teorema 41, podemos afirmar que qualquer intervalo principal a $D > 1$ dimensões é um boreliano tirado do espaço de Borel multidimensional (a D dimensões) introduzido através da fórmula 64). Por outro lado, vimos, no n.º **1** do § 14, que é um semianel a classe formada pelos intervalos principais contidos numa dada recta real, donde concluímos, atendendo ao teorema 31, que é *um semianel a classe formada pelos intervalos principais contidos num dado espaço real multidimensional a* $D < +\infty$ *dimensões.* Se invocarmos o exemplo 30 em lugar do n.º **1** do § 14, concluímos semelhantemente que é *um semianel a classe formada pelos intervalos contidos num dado espaço real multidimensional a* $D < +\infty$ *dimensões,* intervalos esses que são todos borelianos.

Dado o espaço de Borel multidimensional (X,B) da fórmula 64) e escolhida uma recta-factor (X_t,B_t), a correspondente álgebra de Borel B_t é gerada ou pela respectiva classe de intervalos principais (lineares) ou por qualquer uma das classes geradoras das alíneas a) a f) do n.º **3** do § 14 ou ainda pela álgebra geradora do exemplo 51, isto sob a reserva de se adaptar a notação, afectando do índice t os símbolos X, x, a, b, n, $-\infty$, $+\infty$ e c a fim de diferençar o factor escolhido dos outros factores e do produto de todos os factores. Nesta conformidade, pondo $n_t = 1,2,3,\ldots$ para cada t, podemos estabelecer as igualdades

$$X_t = \underset{n_t}{V}\{-n_t \leqslant x_t < n_t\} = \underset{n_t}{V}\{-n_t < x_t < n_t\} =$$

$$= \underset{n_t}{V}\{-n_t \leqslant x_t \leqslant n_t\} = \underset{n_t}{V}\{-\infty_t < x_t < n_t\} =$$

$$= \underset{n_t}{V}\{-n_t \leqslant x_t < +\infty_t\} = \underset{n_t}{V}(\{-n_t \leqslant x_t < c_t\} \dot{+} \{c_t \leqslant x_t < n_t\}),$$

com $c_t \varepsilon X_t$ a designar um número finito arbitrariamente fixado. Ora, examinando essas igualdades, reconhecemos que, seja qual for t, as classes geradoras citadas são *todas classes geradoras arredondadas* nos termos da definição dada no início do n.º **5** do § 18 (incluindo a álgebra geradora supracitada por lhe pertencer a recta X_t). Deste facto, do corolário 34' e das convenções relativas a intervalos multidimensionais estabelecidas no n.º **4** do § 11, inferimos as seguintes classes geradoras para a álgebra de Borel

$\mathcal{B}(\mathrm{B}) = \dot{\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times}} \mathcal{B}_t(\mathrm{B}_t)$, multidimensional a $D < +\infty$ dimensões e tirada do espaço real $X(x) = \underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} X_t(x_t)$:

a) *o semianel formado pelos intervalos principais a* D *dimensões* ou seja pelos produtos $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{a_t \leqslant x_t < b_t\}$, com $-\infty_t < a_t \leqslant$ $\leqslant b_t < +\infty_t$ para cada t;

b) *o semianel formado por todos os intervalos a* D *dimensões*;

c) a classe formada por *todos os intervalos a* D *dimensões* que sejam *limitados e abertos* [ou *fechados*] ;

d) a classe formada por todos os produtos $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} H_t$ em que, seja qual for t, o conjunto H_t se supõe aberto [ou fechado] ;

e) a classe formada pelos produtos

$$\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{-\infty_t < x_t < a_t\} \text{ [ou } \underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{a_t \leqslant x_t < +\infty_t\}],$$

com a_t finito para cada t;

f) *a classe numerável formada pelos produtos*

$$\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{-\infty_t < x_t < r_t\} \text{ [ou } \underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \{r_t \leqslant x_t < +\infty_t\}],$$

com r_t *racional para cada* t;

g) a classe formada pelos produtos $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} M_{c_t}$ onde, seja qual for t, o símbolo c_t refere um número arbitrariamente fixado, ou finito ou igual a $-\infty_t$ ou igual a $+\infty_t$, e onde o símbolo M_{c_t} refere o intervalo linear genérico, suposto emergente de c_t e, além disso: ou principal, se c_t for finito; ou do primeiro tipo considerado em e), se $c_t = -\infty_t$; ou do outro tipo considerado em e), se $c_t = +\infty_t$; †

---

† Neste contexto, permitimo-nos chamar a atenção para a importância das classes geradoras da alínea g) no estudo (futuro) das chamadas medidas de Lebesgue-Stieltjes multidimensionais a $D < +\infty$ dimensões.

h) a classe constituída pelos produtos $\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times} K_t$ onde, seja qual for t, o símbolo K_t refere a soma genérica pertencente à *álgebra* K_t dos exemplos 51 e 40, transcritos de X e K para X_t e K_t, soma essa que terá eventualmente uma parcela da forma $\{-\infty_t < x_t < b_t\}$, além de ter um número finito e não-negativo de parcelas da forma $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ ($b_t = +\infty_t$ admitido).

Como a alínea h) dá $\overset{\bullet}{\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times}} K_t = \overset{\bullet}{\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times}} B_t = B$, o teorema 35 mostra que B admite a álgebra geradora cujo elemento genérico S se obtém somando produtos $\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times} K_t$ disjuntos dois a dois, em número finito e do tipo referido em h). Mas, tomando em conta a fórmula 31') e a associatividade da adição de conjuntos, reconhecemos que o elemento genérico S também se pode obter somando um número finito de produtos tais que o factor número t de cada um deles seja da forma $\{-\infty_t < x_t < b_t\}$ ou $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ ($b_t = = +\infty_t$ admitido). Por outro lado, qualquer soma de produtos do genéro agora referido é uma soma dum número finito de produtos $\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times} K_t$ do tipo da alínea h), com a particularidade de os seus factores K_t serem todos somas reduzidas a uma só parcela. Em face do exposto, podemos acrescentar a seguinte classe geradora de B:

i) a *álgebra* cujo elemento genérico se obtém somando produtos $\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times} L_t$ disjuntos dois a dois, em número finito e tais que, seja qual for a parcela e seja qual for o valor de t, o factor L_t ou é da forma $\{-\infty_t < x_t < b_t\}$ ou é da forma $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ ($b_t = +\infty_t$ admitido).

Exemplo 66. Dada uma sucessão de rectas de Borel $[X_n(x_n), B_n(B_n)]$ (n = 1,2,3, ...), então a álgebra de Borel igual a $\overset{\bullet}{\underset{n}{\times}} B_n$ é gerada pela álgebra, tirada de $\underset{n}{\times} X_n$, cujo conjunto genérico se obtém somando qualquer número finito de produtos $\underset{n}{\times} B_n$ especiais, sujeitos à condição de cada um deles admitir apenas um número finito de factores $B_n \neq X_n$. — Com efeito, a propriedade exposta decorre do teorema 36 quando aí se põe $\Omega_n = X_n$, $K_n = B_n$ e $K_n = B_n$, isto para cada n.

Exercício 66. Dado um espaço de Borel multidimensional $(X,\mathcal{B})$ a um número finito de dimensões, mostre que a álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é gerada pela classe dos conjuntos abertos [ou fechados] contidos no espaço real X.

3. **Espaços de Borel alargados e multidimensionais**

Tendo em mente as convenções estabelecidas no n.º **1** do § 14, retomemos a fórmula 64) e substituamos aí não só cada recta real $X_t(x_t)$ pela sua homóloga alargada $\overline{X}_t(x_t)$, como também cada álgebra de Borel linear $\mathcal{B}_t(B_t)$ pela sua homóloga alargada $\overline{\mathcal{B}}_t(\overline{B}_t)$. Então, as correspondentes rectas de Borel alargadas $[\overline{X}_t(x_t),\overline{\mathcal{B}}_t(\overline{B}_t)]$, abreviadamente $(\overline{X}_t,\overline{\mathcal{B}}_t)$, têm por produto o espaço mensurável

$$\dot{\underset{t}{\times}} (\overline{X}_t,\overline{\mathcal{B}}_t) = (\underset{t}{\times} \overline{X}_t, \dot{\underset{t}{\times}} \overline{\mathcal{B}}_t) = (\overline{X},\overline{\mathcal{B}}), \tag{64'}$$

produto esse frequentemente votado ao esquecimento em face do seu homólogo da fórmula 64), quando outro tanto é menos frequente na passagem duma recta de Borel avulsa para a sua homóloga alargada.

Sabemos, pelo último trecho do n.º **5** do § 7, que $\underset{t}{\times} \overline{X}_t = \overline{X}$ é um espaço real alargado e multidimensional cujo ponto genérico $x = (x_t, t\varepsilon T)$ tem as coordenadas x_t, cada uma das quais é susceptível de assumir qualquer valor real, quer finito quer infinito negativo ou positivo. Por outro lado, vimos, um pouco antes da fórmula 60), que a álgebra-σ $\dot{\underset{t}{\times}} \overline{\mathcal{B}}_t = \overline{\mathcal{B}}$ é gerada pela classe $\overline{P}$ que se compõe dos produtos $\underset{t}{\times} \overline{B}_t = \overline{P}$ possíveis, produtos esses cujos factores são borelianos lineares.

Posto isso, vamos fazer *transitar a nomenclatura estabelecida a propósito dos entes matemáticos* $\mathcal{B}$, $B\varepsilon\mathcal{B}$ e $(X,\mathcal{B})$, relativos à fórmula 64), *para os seus homólogos alargados* $\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{B}\varepsilon\overline{\mathcal{B}}$ e $(\overline{X},\overline{\mathcal{B}})$, relativos à fórmula 64'), e, além disso, notemos que o corolário 33' e a observação posta no fim do n.º 4 do § 18 não deixam de justificar a *associatividade das multiplicações conducentes a* $\overline{B}$ *e a* $(\overline{X},\overline{B})$.

No que concerne ao teorema 41 e ao exemplo 64, eles adaptam-se através da seguinte *propriedade:*

«Dado um espaço de Borel alargado e multidimensional $(\overline{X},\overline{B})$, é boreliano contido em $\overline{X}$ não só todo o produto de borelianos lineares (alargados) contido em $\overline{X}$, como também todo o conjunto intervalar ou intransnumerável contido em $\overline{X}$. Além disso, $(\overline{X},\overline{B})$ não pode admitir nenhuma decomposição irredutível.»

Estas adaptações têm justificações que são as do teorema 41 e do exemplo 64, desde que nos reportemos à fórmula 64') em lugar da fórmula 64) e desde que modifiquemos cada símbolo *maiúsculo,* com ou sem o índice t, para o seu homólogo encimado pelo sinal^{-}.

Seja ∞ *o conjunto formado por todos os pontos* $x\varepsilon\overline{X}$ *que tenham alguma coordenada infinita.* Então, a definição duma álgebra-σ e a propriedade precedente aplicada ao intervalo X provam a relação

$$X^{-} = \overline{X} - X = \infty\varepsilon\overline{B}. \tag{65}$$

Nesta conformidade, o teorema 42 adapta-se através da seguinte *propriedade:*

«Dado um espaço de Borel multidimensional a $D < +\infty$ dimensões, qualquer conjunto aberto ou fechado e contido no espaço real (não alargado) subjacente é um conjunto boreliano (a D dimensões) em relação ao correspondente espaço de Borel alargado.»

No que concerne a conjuntos abertos, sejam $A \leqslant X$, serve a demonstração do teorema 42 ou seja a respectiva adaptação da demonstração do teorema 20, isto se interpretarmos os intervalos intervenientes como borelianos do espaço alargado. No que concerne a conjuntos fechados, sejam $F \leqslant X$, serve a justificação dada no decurso da demonstração do teorema 20, desde que se recorra a $\overline{X}\varepsilon\overline{B}$ e à relação 65) em lugar da alínea a) do exemplo 50.

4. Classes geradoras de $\overline{B}$ no caso da dimensionalidade finita

Ora, escolhida arbitrariamente uma recta-factor do primeiro membro da fórmula 64'), corresponde-lhe uma recta de Borel não alargada (X_t, B_t) com as classes geradoras arredondadas referidas no n.º **2**.

Embora nenhuma dessas classes seja geradora de $\overline{B}_t$, o corolário 21' faz com que qualquer uma delas, seja M_t, passe a ser uma classe geradora de $\overline{B}_t$ se lhe juntarmos os conjuntos elementares $\{-\infty_t\}$ e $\{+\infty_t\}$, procedimento este que vai mais longe: pois conduzirá a uma *classe geradora arredondada*, isto porque $\overline{X}_t$ resulta igual a $\{-\infty_t\} \dot{+} \{+\infty_t\} \dot{+} X_t$ onde X_t pode obter-se, por hipótese, unindo os conjuntos duma subclasse de M_t *intransnumerável.*

Em face do exposto e do corolário 34', podemos obter *classes geradoras da álgebra de Borel $\overline{B}$ alargada e multidimensional a* $D < +\infty$ *dimensões,* tirada do espaço real alargado $\overline{X}(x) = \underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \overline{X}_t(x_t)$, *retomando as classes das alíneas* a) *a* h) *do* n.º **2** *e acrescentado aí, seja qual for* t, *as duas novas escolhas* $\{-\infty_t\}$ *e* $\{+\infty_t\}$ às escolhas anteriormente admitidas *para o factor número* t *de qualquer produto de conjuntos* contidos nas diversas rectas X_t ou $\overline{X}_t$.

Na alínea h) remodelada do modo referido, o conjunto genérico da classe geradora de $\overline{B}$ será um produto $\underset{1 \leqslant t \leqslant D}{\times} \overline{K}_t$ onde, seja qual for t, o símbolo $\overline{K}_t$ pode representar a soma genérica com um número finito de parcelas cujas formas, embora susceptíveis de variar de parcela para parcela, só podem ser ou $\{-\infty_t\}$ ou $\{+\infty_t\}$ ou $\{-\infty_t < x_t < b_t\}$ ou $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ ($b_t = +\infty_t$ admitido e a_t sempre finito). Nestas condições, a classe $\overline{K}_t$, formada pelas somas $\overline{K}_t$ admissíveis, sujeita-se à análise feita na *versão principal do exemplo* 40, transcrita de X para $\overline{X}_t$, com uma pequena diferença formal: se o primeiro intervalo linear a somar (digamos) $J_{t,1}$ tiver um extremo inferior diferente de $-\infty_t$, então a parte de $\overline{X}_t$ anterior a $J_{t,1}$ será a soma de $\{-\infty_t\}$ com o intervalo aberto compreendido entre $-\infty_t$ e o extremo inferior de $J_{t,1}$; se o último intervalo linear a somar (digamos) J_{t,N_t} tiver um extremo superior diferente de $+\infty_t$, então a parte de $\overline{X}_t$ posterior a J_{t,N_t} será a soma de $\{+\infty_t\}$ com um intervalo (admissível) compreendido entre $+\infty_t$ e o extremo superior de J_{t,N_t}. Em face do exposto, concluímos que cada uma das classes $\overline{K}_t$ será uma álgebra tirada da respectiva recta alargada $\overline{X}_t$, facto esse que permite adaptar a análise que nos levou da alínea h) para a alínea i) do n.º **2**, desde que ponhamos $\overline{K}_t, \overline{B}_t, \overline{B}, \overline{S}$ e $\overline{K}_t$ em lugar de K_t, B_t, B, S e K_t, sem esquecer as novas escolhas $\{-\infty_t\}$ e $\{+\infty_t\}$ a acrescentar às escolhas anteriormente admitidas para os factores dos produtos simplificados, quer dizer para os factores que são somas reduzidas a uma só parcela. Nestes termos, a nova álgebra geradora a substituir à da alínea i) do n.º **2** será constituída pelas somas com um número finito de parcelas da forma $\underset{1\leqslant t\leqslant D}{\times} \overline{L}_t$ onde, seja qual for a parcela e seja qual for t, o factor $\overline{L}_t$ pode assumir uma das quatro formas $\{-\infty_t\}$, $\{+\infty_t\}$, $\{-\infty_t < x_t < b_t\}$ e $\{a_t \leqslant x_t < b_t\}$ ($b_t =$ $= +\infty_t$ admitido e a_t sempre finito).

Exemplo 67. Dada uma sucessão de rectas de Borel alargadas $[\overline{X}_n(x_n), \overline{B}_n(\overline{B}_n)]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, então a álgebra de Borel igual a $\dot{\underset{n}{\times}} \overline{B}_n$ é gerada pela álgebra (tirada de $\underset{n}{\times} \overline{X}_n$) cujo conjunto genérico se obtém somando qualquer número finito de produtos $\underset{n}{\times} \overline{B}_n$, sujeitos à condição de cada um deles admitir apenas um número finito de factores $\overline{B}_n \neq \overline{X}_n$. Com efeito, a propriedade exposta decorre do teorema 36 quando aí se põe $\Omega_n = \overline{X}_n, K_n =$ $= \overline{B}_n$ e $K_n = \overline{B}_n$, isto para cada n.

Observação. O tratamento aqui seguido para os espaços de Borel alargados e multidimensionais $\dot{\underset{t}{\times}} (\overline{X}_t, \overline{B}_t) = (\overline{X}, \overline{B})$ apoia-se na teoria geral da multiplicação de espaços mensuráveis e no relacionamento entre as rectas de Borel (X_t, B_t) e as suas homólogas alargadas $(\overline{X}_t, \overline{B}_t)$, relacionamento esse orientado pelo corolário 21' e conduzido através de classes geradoras. Todavia, não se desenvolveu o relacionamento directo entre $(\overline{X}, \overline{B})$ e $(X, B) =$

$= \dot{\times}_{t} (X_t, \mathcal{B}_t)$, salvo nos casos particulares importantes a que se referem as propriedades enunciadas no n.º **3**, suficientes para os propósitos em vista e valorizadas pelo facto que o corolário 21' permite interpretar qualquer produto de borelianos lineares $B_t \varepsilon \mathcal{B}_t$ como um produto de borelianos lineares $\overline{B}_t \varepsilon \overline{\mathcal{B}}_t$. — Uma *via alternativa* de introduzir $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$ seria definir $\overline{\mathcal{B}}$ como sendo a classe formada por todas as somas binárias que tivessem primeira parcela coincidente com algum B, pertencente a $\mathcal{B}$ e interpretado como conjunto contido em $\overline{X}$, e que tivessem outra parcela, esta apropriadamente escolhida entre os subconjuntos de ∞ propriamente contido em $\overline{X}$. Claro que a via alternativa se afigura mais simples do ponto de vista formal; em contrapartida, a via aqui seguida proporciona o acesso directo às classes geradoras de $\overline{\mathcal{B}}$, tão importante para fins ulteriores. O teorema 21 e o corolário 21' oferecem boas sugestões para o estudo da eventual equivalência entre as duas vias de tratamento mencionadas, estudo esse que pode ficar ao cuidado do leitor interessado.

Exercício 67. Utilize a *versão alternativa do exemplo* 40 para construir uma álgebra geradora da álgebra de Borel $\overline{\mathcal{B}}$, alargada e multidimensional a $D < +\infty$ dimensões, que foi objecto das considerações que precedem o exemplo 67. Claro que a nova versão será, por um lado, mais directa, visto ter como ponto de partida álgebras tiradas das rectas já alargadas $\overline{X}_t$, e será, por outro lado, menos directa, visto exigir que se prove o resultado análogo ao do exemplo 51 para as álgebras referidas em último lugar. Será conveniente comparar os resultados alcançados por meio de cada uma das versões do exemplo 40.

Exercício 68. Haverá algum inconveniente em retomar a propriedade enunciada a seguir à fórmula 65) e, em seguida, substituir aí os conjuntos abertos ou fechados, todos contidos em X, por outros abertos ou fechados, todos contidos em $\overline{X}$?

CAPÍTULO III

FUNÇÕES MENSURÁVEIS

ESTUDO GERAL DAS FUNÇÕES MENSURÁVEIS

§ 21 — GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES DE LIGAÇÃO ENTRE ESPAÇOS

1. Funções de conjunto

Dados os espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$, consideremos uma transformação ξ que faça corresponder um e só um ponto $w \varepsilon W$ a cada ponto ω dum conjunto não-vazio $D \leqslant \Omega$. Vamos traduzir a situação descrita através da *igualdade simbólica*

$$w = \xi(\omega) \; (\omega \varepsilon D). \tag{66}$$

Neste contexto, vamos chamar a ξ *correspondência funcional* ou *função,* vamos chamar a D *domínio* (da função considerada) e vamos chamar a ω *argumento* ou *variável independente;* por outro lado, w será a *variável dependente* ou *função* e o conjunto não-vazio F formado pelos pontos w admissíveis será o *contradomínio* (da função considerada).

Sejam O_Ω e O_W os conjuntos vazios respectivamente de Ω e de W. Então, o desenvolvimento ulterior correrá duma forma mais unificada se, por um lado, seleccionarmos um ponto fixo $w_o \varepsilon W$ segundo algum critério considerado oportuno na ocasião e se, por outro lado, convencionarmos $\xi(\omega) = w_o$ sempre que o complemento $D^- \neq O_\Omega$ e $\omega \varepsilon D^-$, procedimento esse que conduz ao *do-*

mínio uniforme Ω e a um *contradomínio* E *igual a* $F^V\{w_0\}$, *a* F *se* $w_0 \varepsilon F$ *e a* $F \dotplus \{w_0\}$ *se* $w_0 \varepsilon F^-$. Correspondentemente, temos a *igualdade de definição*

$$w = \xi(\omega) \ (\omega \varepsilon \Omega), \tag{67}$$

onde o domínio da função nunca deixa de ser o espaço inteiro Ω.

Quer se use a fórmula 66) quer se use a fórmula 67), não só temos uma *função propriamente dita* ou *não-degenerada* no caso dum contradomínio formado por mais do que um ponto w, como também temos uma *função* (*degenerada em*) *constante* no caso dum contradomínio singular (formado por um só ponto w).

Posto isso, vamos encarar a relação 67) sob outro ponto de vista. Escolhido arbitrariamente um conjunto não-vazio $K \leqslant \Omega$, os pontos $w = \xi(\omega)$ tais que $\omega \varepsilon K$ perfazem um conjunto não-vazio $M \leqslant E$, que *será o transformado de* K *por meio de* ξ. Se acrescentarmos a *convenção de* ξ *transformar* O_Ω *em* O_W, então fica a *nova igualdade de definição*

$$M = \xi(K) \tag{68}$$

onde *as variáveis são conjuntos,* onde $M \leqslant E = \xi(\Omega)$, onde *o domínio é* 2^Ω e onde o contradomínio está contido em 2^W e é tal que lhe pertence $O_W = \xi(O_\Omega)$.

Ora, quando se efectuam as operações internas usuais sobre conjuntos $K \leqslant \Omega$, a fórmula 68) faz corresponder conjuntos $M \leqslant W$ relacionados por outras operações internas, pelo que se afigura oportuno indagar a respeito do posicionamento mútuo entre tais operações.

Vejamos um exemplo supondo que Ω é o espaço formado pelos triângulos rectângulos ω existentes num dado plano de Descartes, que W é uma recta real e que, seja qual for ω, o correspondente $w = \xi(\omega)$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo escolhido. Então, o contradomínio E deixa de fora os números negativos e haverá triângulos rectângulos ω_1 e $\omega_2 \neq \omega_1$ tais que $w_1 = \xi(\omega_1) = \xi(\omega_2) = w_2$. Reconhecemos assim que nem sempre a disjunção entre os conjuntos singulares $\{\omega_1\}$ e $\{\omega_2\}$ se transmite aos seus transformados $\{w_1\}$ e $\{w_2\}$ e reconhecemos ainda que nem sempre o transformado da soma $\{\omega_1\} \dotplus \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ pode igualar-se à soma dos transformados (embora no caso vertente o transformado da união $\{\omega_1\} \vee \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ seja igual à união dos transformados $\{w_1\} \vee \{w_2\} = \{w_1\}$). Por outro lado, o caso considerado dá um transformado E para o complemento $\{\omega_1, \omega_2\}^-$ e dá um complemento $W - \{w_1\} \neq E$ para o transformado $\{w_1\}$ de $\{\omega_1, \omega_2\}$.

O nosso exemplo ilustra que o supracitado posicionamento entre operações é tal que as operações nem sempre acompanham intactas a passagem de Ω para W por intermédio de ξ, podendo assim falhar a transformação digamos duma álgebra tirada de Ω numa álgebra tirada de W (compare-se com o princípio do n.º **4** do § 11). Daí a conveniência de abordar a questão por outra via, porventura mais frutuosa.

2. Função inversa

Seguindo uma ideia que se deve essencialmente a *Lebesgue*, vamos retomar os dados do n.º **1**, vamos considerar a função $\xi(K)$ da fórmula 68) na qualidade de **função directa** e vamos passar para a chamada **função inversa** através da *igualdade simbólica*

$$L = \eta(M) \ (O_W \neq M \leqslant E) \tag{69}$$

onde η representa a *transformação inversa de* ξ, *interpretada como a transformação que faz corresponder a qualquer conjunto não--vazio* $M \leqslant E$ *o conjunto* $L \neq O_\Omega$ *formado por* **todos** *os pontos* $\omega\varepsilon\Omega$ *que* ξ *envia para algum* $w\varepsilon M$, conjunto L que certamente contém K na hipótese de M provir da fórmula 68) e que até pode ser sobreconjunto próprio desse K (visto em princípio não haver impedimento para a eventualidade de ξ enviar um ponto $\omega\varepsilon K^-$ para algum $w\varepsilon M$). Neste contexto, talvez valha a pena chamar a atenção para o seguinte: se tivéssemos partido de 67) em lugar de 68) e se tivéssemos posto $\omega = \eta(w)$, íamos cair nos pontos ω que ξ envia para w, pelo que a um dado $w\varepsilon E$ poderiam corresponder muitos ω; por outro lado, a relação 69) foi gizada por forma a fazer corresponder a cada M incidente um e só um L conduzindo-nos assim a uma situação (relativa à função inversa) em que é mais eficiente recorrer a conjuntos do que recorrer a pontos.

Posto isso, o desenvolvimento ulterior correrá duma forma mais unificada se ampliarmos a relação 69) *pondo* $L = O_\Omega$ *sempre que* $M \leqslant E^-$, *o que cobre o caso* $M = O_W$, *e pondo* $\eta(M) = \eta(M \wedge E)$ *para qualquer* $M \leqslant W$, *mesmo nos casos em que* $M \leqslant E$ *falhar*. Corresponde a *igualdade de definição*

$$L = \eta(M) \tag{70}$$

onde *as variáveis são conjuntos*, onde $L \leqslant \Omega = \eta(E) = \eta(W)$, onde *o domínio é* 2^W e onde o contradomínio está contido em 2^Ω e é tal que lhe pertence $O_\Omega = \eta(O_W)$.

Escolhidos arbitrariamente dois conjuntos M_1 e M_2, ambos contidos em W e disjuntos entre si, a relação 70) faz corresponder os conjuntos $L_1 = \eta(M_1)$ e $L_2 = \eta(M_2)$, contidos em Ω e também disjuntos entre si, isto porque, no caso de falhar essa disjunção, o exemplo 4 dava $L_1 \wedge L_2 \neq O_\Omega$ e qualquer ponto $\omega \varepsilon L_1 \wedge L_2$ seria enviado por ξ simultaneamente para M_1 e M_2, desmentindo assim a hipótese da disjunção entre M_1 e M_2. Em suma, temos o seguinte resultado:

a disjunção entre M_1 e M_2 implica
a disjunção entre $\eta(M_1)$ e $\eta(M_2)$. (71)

Por outro lado, escolhidos arbitrariamente conjuntos $M_t \leqslant W$, com t a percorrer uma família T, então $\omega \varepsilon \eta(\bigvee_t M_t)$ equivale a ξ envia ω para $\bigvee_t M_t$, equivale a ξ envia ω para um dos M_t, equivale a $\omega \varepsilon \eta(M_t)$ para um dos t, equivale a $\omega \varepsilon \bigvee_t \eta(M_t)$. Em suma, temos o seguinte resultado:

$$\eta(\bigvee_t M_t) = \bigvee_t \eta(M_t), \tag{72}$$

extensível a uniões destituídas de parcelas mediante as convenções estabelecidas para conjuntos vazios. Caso os conjuntos M_t sejam disjuntos dois a dois, o recurso ao resultado 71) conduz a um caso particular do resultado 72), a saber:

$$\eta(\dot{\sum_t} M_t) = \dot{\sum_t} \eta(M_t). \tag{72'}$$

Posto isso, escolhido arbitrariamente um conjunto $M \leqslant W$, então $\omega \varepsilon \eta(M^-)$ equivale a ξ envia ω para M^-, equivale a ξ *não* envia ω para M, equivale a ω não pertence a $\eta(M)$, equivale a $\omega \varepsilon [\eta(M)]^-$. Em suma, temos o seguinte resultado:

$$\eta(M^-) = [\eta(M)]^-. \tag{73}$$

Podemos resumir os resultados 71) a 73) através do

Teorema 43. «A transformação inversa η da fórmula 70) passa de W para Ω a complementação dum conjunto, a disjunção entre dois conjuntos e ainda uniões e adições arbitrárias.»

Exemplo 68. Vale a seguinte *asserção:* «A transformação η da fórmula 70) passa de W para Ω quaisquer intersecções de conjuntos.» — Com efeito: ou utilizamos um processo de dedução directa no estilo dos processos seguidos para estabelecer os resultados 71) a 73); ou então recorremos às fórmulas 9) e ao teorema 43 para chegarmos ao desenvolvimento

$$\eta(\underset{t}{\Lambda} M_t) = \eta((\underset{t}{V} M_t^-)^-) = [\underset{t}{V} \eta(M_t^-)]^- = \underset{t}{\Lambda} [\eta(M_t^-)]^- = \underset{t}{\Lambda} \eta(M_t).$$

Exemplo 69. Vale a seguinte *asserção:* «A transformação da fórmula 70) passa de W para Ω a subtracção entre dois conjuntos.» — Com efeito, a fórmula 11), o exemplo 68 e a fórmula 73) dão

$$\eta(M_1 - M_2) = \eta(M_1 \Lambda M_2^-) = \eta(M_1) \Lambda [\eta(M_2)]^- = \eta(M_1) - \eta(M_2).$$

Exercício 69. Mostre que a transformação η da fórmula 70) passa de W para Ω a subtracção simétrica de dois conjuntos e a relação $\leqslant$ (contido em) entre dois conjuntos, mas não passa necessariamente a relação «propriamente contido em» entre dois conjuntos.

3. Partições e representações compatíveis

Atendendo à correspondência biunívoca e recíproca que há entre os pontos pertencentes a um espaço e os conjuntos elementares contidos nesse espaço, podemos escrever a igualdade de definição 67) sob a forma equivalente

$$\{w\} = \xi(\{\omega\}), \tag{67'}$$

onde o domínio da função é a classe formada pelos conjuntos elementares contidos em Ω e onde o contradomínio é a classe formada pelos conjuntos elementares contidos em E ou seja contidos no contradomínio de $\xi(\omega)$, facto esses que nos colocam num caso particular da igualdade de definição 68). Por outro lado, seja qual for o ponto $w \varepsilon W$, a igualdade de definição 70) pode ser particularizada para

$$L_{\{w\}} = \eta(\{w\}), \tag{70'}$$

onde $w \varepsilon E^-$ implica $L_{\{w\}} = O_\Omega$ e onde $w \varepsilon E$ implica $L_{\{w\}} \neq O_\Omega$, com $L_{\{w\}}$ igual ao conjunto formado pelos pontos ω que ξ envia para $\{w\}$.

Como o resultado 71) assegura a disjunção dois a dois entre os diversos conjuntos $\eta(\{w\})$, as fórmulas 72') e 8") e a igualdade já referida $\eta(W) = \Omega$ conduzem a

$$\dot{\sum_{w \epsilon E}} \eta(\{w\}) = \eta(\dot{\sum_{w \epsilon W}} \{w\}) = \eta(W) = \dot{\sum_{\omega \epsilon \Omega}} \{\omega\}, \tag{74}$$

pelo que cada uma das parcelas do primeiro membro de 74) é uma soma parcial não-vazia extraída do último membro ou, a mesma coisa dita por outras palavras, as parcelas do primeiro membro formam uma *partição do espaço* Ω, à qual vamos chamar *partição induzida pela função* ξ.

Posto isso, recordemos que o símbolo $I_K(\omega)$ representa a indicatriz do conjunto $K \leqslant \Omega$ e *convencionemos que um conjunto multiplicado pelo número* 1 *dá o próprio conjunto e que um conjunto* *multiplicado pelo número* 0 *dá o conjunto vazio do respectivo espaço.* Então, vale uma relação substituta de 67'), denominada *representação canónica da função* ξ, a qual pode tomar o aspecto

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\Sigma}_{w \in E} [\{w\} \cdot I_{\eta(\{w\})}(\omega)], \tag{75}$$

isto porque, seja qual for ω, a indicatriz de 75) vale 1 para o w que ξ faz corresponder a ω e vale 0 para todo o w que não esteja nessas condições.

Observação. O segundo membro de 75) encontra-se definido *mesmo que* as parcelas formem uma colecção transnumerável. *Outro tanto já não sucede* se supusermos que os pontos w são números e se substituirmos $\dot{\Sigma}$ por Σ e os factores {w} pelos factores numéricos w.

Acabamos de ver que *a partição de* Ω *induzida por* ξ *determina a representação canónica de* ξ. Por outro lado, *uma partição de* Ω *é formada por conjuntos não-vazios* $K_t \leq \Omega(t \varepsilon T)$, *disjuntos dois a dois e com soma igual a* Ω, *e diz-se compatível com a função* ξ *se e só se, seja qual for* t, *valer a relação* $\xi(K_t) = \{w_t\}$, *com* $w_t \varepsilon E$, *não ficando excluído de modo nenhum que duas determinações de t diferentes entre si correspondam a pontos* w_t *iguais entre si.* Uma tal partição compatível com ξ e as convenções anteriores sobre produtos de conjuntos por um número igual a 0 ou a 1 são duas ocorrências que facultam uma relação, denominada *representação compatível com a função* ξ, a qual pode tomar o aspecto

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\Sigma}_{t \in T} [\{w_t\} \cdot I_{K_t}(\omega)], \tag{76}$$

isto porque, seja qual for ω, a indicatriz da fórmula 76) vale 1 para o K_t a que pertence ω e vale 0 para qualquer outro K_t.

Como a partição de Ω induzida por ξ se reduz a um caso particular das partições de Ω compatíveis com ξ, reconhecemos que as representações compatíveis com ξ generalizam a representação canónica de ξ. Aliás, esta última representação é a *mais económica* entre as representações compatíveis com ξ, porque qualquer conjunto K_t de 76) é formado por *certos* pontos ω que ξ envia para $\{w_t\}$ e, portanto, está contido no conjunto formado por *todos* os pontos ω que ξ envia para $\{w_t\}$, quer dizer contido no conjunto $\eta(\{w_t\})$.

Ora, proposta uma partição de Ω formada por conjuntos não--vazios $K_t \leqslant \Omega(t \varepsilon T)$, basta que haja um t tal que $\xi(K_t)$ deixe de ser um conjunto elementar contido em E para que *a partição deixe de ser compatível com a função* ξ. Por outro lado, propostas duas partições de Ω, uma formada por conjuntos não-vazios $K_t \leqslant \Omega(t \varepsilon T)$ e outra formada por conjuntos não-vazios $J_s \leqslant \Omega(s \varepsilon S)$, as intersecções não-vazias $K_t \wedge J_s \leqslant \Omega$ formam uma nova partição de Ω, a que vamos chamar *sobreposta* das duas partições dadas. Com efeito, a disjunção dois a dois dos K_t e também dos J_s implica a disjunção duas a duas das intersecções $K_t \wedge J_s$ donde, atendendo a uma generalização imediata da fórmula 13'), †

$$\dot{\sum_{K_t \wedge J_s \neq O_\Omega}} (K_t \wedge J_s) = \dot{\sum_{t,s}} (K_t \wedge J_s) = (\dot{\sum_t} K_t) \wedge (\dot{\sum_s} J_s) = \Omega .$$

Neste contexto, tem interesse o seguinte

Teorema 44. «Dados os espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$, dada a função de ligação $w = \xi(\omega)$ com domínio Ω e dadas duas partições de Ω, basta que uma das partições dadas seja compatível com a função ξ para que a partição sobreposta resulte também compatível com ξ.»

Demonstração. Suponhamos que é compatível com ξ ou a partição de Ω formada pelos conjuntos K_t ou a partição de Ω formada pelos conjuntos J_s. Dada a comutatividade da intersecção, não há perda de generalidade se admitirmos que a primeira das partições referidas é a compatível com ξ; logo, por definição, qualquer t dá $\xi(K_t) = \{w_t\}$, com w_t pertencente ao contradomínio de ξ. Então, sejam quais forem t e s tais que $K_t \wedge J_s \neq O_\Omega$, a relação $K_t \wedge J_s \leqslant K_t$ implica O_W propriamente contido em $\xi(K_t \wedge J_s) \leqslant \xi(K_t)$ donde $\xi(K_t \wedge J_s) = \{w_t\}$, igualdade essa que prova a compatibilidade da partição sobreposta.

---

† Compare com a nota à justificação da fórmula 27).

Uma consequência importante do teorema 44 é o

Corolário 44'. «Dados os espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$ e dadas as funções de ligação $\xi(\omega)$ e $\rho(\omega)$, ambas com domínio Ω, resulta compatível simultaneamente com ξ e com ρ toda a partição sobreposta de duas partições de Ω tais que uma delas seja compatível com ξ e a outra seja compatível com ρ.»

Demonstração. Suponhamos que é compatível com ξ a partição de Ω formada pelos conjuntos K_t e que é compatível com ρ a partição de Ω formada pelos conjuntos J_s. Então, pelo teorema 44, a partição sobreposta resulta compatível não só com ξ, como também com ρ.

Observação. Como toda a partição de Ω compatível com uma função faculta uma representação compatível com essa função, isto de acordo com a fórmula 76), toda a partição sobreposta do tipo referido no corolário 44' dá acesso a representações compatíveis com as funções envolvidas que podem considerar-se *representações paralelas*, quer dizer apoiadas numa partição compatível comum. Escusado será mencionar a importância do paralelismo aqui referido para o estudo simultâneo de duas funções, definidas em Ω e com contradomínios contidos em W.

4. **Funções elementares e funções simples**

Posto isso, uma função ξ introduzida através da fórmula 66) ou através duma das fórmulas 67) e 67') diz-se *elementar* [ou *simples*] sempre que o seu contradomínio for intransnumerável [ou finito] e diz-se *não-elementar* [ou *não-simples*] sempre que o seu contradomínio for transnumerável [ou infinito]. Aqui supomos a função ξ introduzida através de 67) ou de 67'), o que não representa perda de generalidade visto o contradomínio E correspondente a 67) ser intransnumerável [ou finito] se e só se o mesmo suceder ao contradomínio F correspondente a 66). Escusado será dizer que uma função simples é apenas uma função elementar especial.

Caso $\xi(\omega)$ seja uma função elementar [ou simples] de contradomínio $E \leqslant W$, os pontos $w \varepsilon E$ podem representar-se como pontos w_h, com $0 \leqslant h < H \leqslant +\infty$ [ou $0 \leqslant h < H < +\infty$], e *a representação canónica* 75) *de* ξ *pode tomar a seguinte forma de estrutura simplificada:*

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_h} [\{w_h\} \cdot I_{\eta(\{w_h\})}(\omega)], \tag{75'}$$

com $0 \leqslant h < H$ e com $H \leqslant +\infty$ [ou $H < +\infty$].

Em geral haverá representações compatíveis com a função elementar [ou simples] ξ as quais deixam de ser canónicas e, até, as pode haver com uma classe de conjuntos não-vazios K_t propriamente contidos em Ω que seja transnumerável [ou infinita]. Neste contexto, podemos chamar *intransnumeravelmente* [ou *finitamente*] *compatível* a uma representação compatível com ξ para a qual a classe dos conjuntos K_t seja intransnumerável [ou finita].

Exemplo 70. Sejam $\xi(\omega)$ e $\rho(\omega)$ duas funções definidas em Ω e não necessariamente elementares, cada uma com contradomínio contido em W. Recordando o texto que precede a fórmula 76), suponhamos que os conjuntos $K_t(t \varepsilon T)$ formam uma partição de Ω compatível com ξ e que os conjuntos $J_s(s \varepsilon S)$ formam uma partição de Ω compatível com ρ. Correspondentemente, teremos não só a representação compatível com ξ dada pela fórmula 76), como também a representação compatível com ρ dada pela fórmula homóloga

$$\rho(\{\omega\}) = \dot{\sum_{s \varepsilon S}} [\{v_s\} \cdot I_{J_s}(\omega)], \tag{76'}$$

onde, seja qual for s, vale a relação $\rho(J_s) = \{v_s\}$, com v_s a pertencer ao contradomínio de ρ. — Ora, de acordo com a parte final da demonstração do teorema 44, toda a intersecção não-vazia $K_t \wedge J_s$ dá as relações $\xi(K_t \wedge J_s) = \{w_t\}$ e $\rho(K_t \wedge J_s) = \{v_s\}$.† Por outro lado, *a partição sobreposta* das duas partições de Ω aqui

† Caso as funções ξ e ρ se identifiquem, torna-se inevitável a igualdade $w_t = v_s$.

consideradas sujeita-se ao corolário 44' e à observação anexa; logo a dita partição sobreposta *faculta representações compatíveis e paralelas para as duas funções* ξ *e* ρ, *a saber:*

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_{K_t \wedge J_s \neq O_\Omega}} [\{w_t\} \cdot I_{K_t \wedge J_s}(\omega)]$$

e

$$\rho(\{\omega\}) = \dot{\sum_{K_t \wedge J_s \neq O_\Omega}} [\{v_s\} \cdot I_{K_t \wedge J_s}(\omega)]. \tag{77}$$

Recordando o texto subsequente à fórmula 76), reconhecemos imediatamente que qualquer uma das representações da fórmula 77) só excepcionalmente será uma representação canónica. Não tem importância porque, no caso vertente, o paralelismo interessa mais do que a canonicidade. — Por fim, se as representações compatíveis correspondentes a 76) e a 76') forem ambas intransnumeravelmente [ou finitamente] compatíveis, é óbvio que o mesmo sucede com as representações paralelas da fórmula 77). Este facto e a natureza especial da representação canónica duma função elementar [ou simples] † permitem afirmar a seguinte *propriedade:* «Caso as funções $\xi(\omega)$ e $\rho(\omega)$ sejam ambas elementares [ou simples], então elas admitem representações paralelas ambas intransnumeravelmente [ou finitamente] compatíveis.»

Exercício 70. Mostre que a representação canónica duma função $\{w\} = \xi(\{\omega\})$ é a sua única representação compatível se e só se ξ for uma função *univalente,* quer dizer tal que nenhum w possa provir de dois pontos ω distintos. Haverá alguma conexão entre a propriedade referida e o relacionamento das potências dos espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$?

---

† Vista na fórmula 75').

§ 22 — FUNÇÕES MENSURÁVEIS ARBITRÁRIAS

1. Generalidades

Retomemos os espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$ do § 21, a função directa $w = \xi(\omega)$ de domínio Ω da fórmula 67), a função de conjunto $M = \xi(K)$ de domínio 2^{Ω} da fórmula 68) e ainda a função inversa $L = \eta(M)$ de domínio 2^{W} da fórmula 70).

Seja $\mathcal{M}$ uma classe não-vazia e formada por conjuntos $M < W$, classe essa que vamos tomar para *subdomínio* de η e à qual corresponde o *subcontradomínio* $\mathcal{L} = \eta(\mathcal{M})$, formado por todos os conjuntos $L = \eta(M)$ tais que $M \varepsilon \mathcal{M}$. Talvez valha a pena referir que se admite quer $\mathcal{M} = 2^{W}$ quer $\mathcal{M}$ propriamente contido em 2^{W} e que *qualquer classe de transformados inversos contidos em* Ω *é uma classe* $\mathcal{L}$ *atingível por uma escolha adequada de* $\mathcal{M}$. Seja como for, vamos chamar a $\mathcal{L}$ *classe induzida em* Ω *pela função* (directa) ξ *e pela classe* $\mathcal{M} < 2^{W}$.

Partindo duma classe $\mathcal{L}$ arbitrária, vamos designar por $\mathcal{P}$ a classe formada por todos os conjuntos $P < W$ (quer pertençam a $\mathcal{M}$ quer não pertençam) sujeitos à condição $\eta(P) \varepsilon \mathcal{L}$. A esta nova classe vamos chamar *classe induzida em* W *pela função* ξ *e pela classe* $\mathcal{L} = \eta(\mathcal{M})$. Atendendo às considerações feitas à volta da fórmula 70), reconhece-se imediatamente que vale sempre $\mathcal{P} > \mathcal{M}$ e que é possível $\mathcal{P}$ conter propriamente $\mathcal{M}$. Servem para exemplo um espaço W formado por dois ou mais pontos, uma função

$\xi(\omega)$ degenerada na constante $w_0 \varepsilon W$ e ainda a classe $M = \{\{w_0\}, \{w_0\}^-\}$, caso este em que $L = \{\Omega, O_\Omega\}$ e $P = 2^W$ contém propriamente M.

Posto isso, se τ for alguma das operações de união, intersecção, complementação e subtracção e se recorrermos a $\tau_t(t\varepsilon T)$, quer dizer a τ a incidir sobre conjuntos ou $M_t \varepsilon M$ ou $L_t = \eta(M_t)\varepsilon L$ formando uma classe consentânea com a operação incidente, então o teorema 43 e os exemplos 68 e 69 fazem corresponder a qualquer escolha permissível dos $L_t \varepsilon L$ a relação

$$\tau_t(L_t) = \tau_t[\eta(M_t)] = \eta\,[\tau_t(M_t)], \tag{78}$$

válida para quaisquer $M_t \varepsilon M$ tais que $\eta(M_t) = L_t$, donde $\tau_t(L_t)\varepsilon L$ sempre que se possa dispor do último membro de 78) por forma que $\tau_t(M_t)\varepsilon M$. Por outro lado, qualquer escolha permissível de-conjuntos $P_t \varepsilon P$, quer dizer tais que $\eta(P_t) = L_t \varepsilon L$, conduz a

$$\eta[\tau_t(P_t)] = \tau_t[\eta(P_t)] = \tau_t(L_t) \tag{78'}$$

donde concluímos que $\tau_t(P_t)\varepsilon P$ sempre que $\tau_t(L_t)\varepsilon L$.

Em face do exposto, reconhecemos que vale a seguinte *propriedade:*

«Caso a classe M [ou L] seja fechada com respeito à operação τ, o mesmo sucede à correspondente classe induzida L [ou P].»

Em particular, caso M [ou L] seja um anel [ou anel-σ ou álgebra ou álgebra-σ], o mesmo sucede à classe induzida L [ou P]. *Aqui interessa-nos preponderantemente o caso em que M* [ou L] *é uma álgebra-σ e logo L* [ou P] *resulta também uma álgebra-σ, à qual vamos chamar álgebra-σ induzida em* Ω [ou W] *pela função ξ e pela álgebra-σ M* [ou L]. Nesta conformidade, a álgebra-σ original M [ou L] permite formar o espaço mensurável (W,M) [ou (Ω,L)] e a álgebra-σ induzida L [ou P] permite formar o novo espaço mensurável (Ω,L) [ou (W,P)], a que vamos chamar *espaço mensurável induzido em* Ω [ou W] *pela função ξ e pelo espaço mensurável* (W,M) [ou (Ω,L)].

Chegados a este ponto, chamamos a atenção do leitor para o seguinte: Escolhida a álgebra-σ M, as suas homólogas induzidas $L \leqslant 2^\Omega$ e $P \leqslant 2^W$ *dependem de η*, com η a representar a função inversa de ξ e com as álgebras-σ induzidas eventualmente inapropriadas aos fins em vista. Nestes termos, o apoio exclusivo em álgebras-σ induzidas por funções directas facultativas pode levantar dificuldades que obviamente se acentuam na hipótese de lidarmos simultaneamente com várias funções directas. Eis a razão principal para as considerações dos números subsequentes.

Exercício 71. Recordando a definição de *átomo* dum espaço mensurável, dada no n.º **1** do § 13, mostre que, proposta uma função $w = \xi(\omega)$ com domínio igual ao espaço Ω e com contradomínio E contido no espaço W, o facto de todo o conjunto elementar $\{w\} \leqslant E$ ser um átomo do espaço mensurável $(W,\mathcal{M})$ acarreta que os conjuntos da partição induzida em Ω por ξ, definida a propósito da fórmula 74), sejam por sua vez átomos do espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{L})$ induzido por ξ e por $(W,\mathcal{M})$.

2. Formulações do conceito de função mensurável

Segue uma definição *muito importante* para fins ulteriores. Escolhidos os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ ou $(\Omega, \mathcal{A})$ e $[W(w),\mathcal{M}(M)]$ ou $(W,\mathcal{M})$, a função (directa) $w = \xi(\omega)$ definida pela fórmula 67) [ou 66)], *com domínio igual ao espaço* $\Omega\varepsilon\mathcal{A}$ [ou *igual ao conjunto* **mensurável** *e não-vazio* $D\varepsilon\mathcal{A}$] e com contradomínio $E \leqslant W$ [ou $F \leqslant W$], é denominada **função mensurável** (por vezes *função medível*) *quando se parte de* $(\Omega,\mathcal{A})$ *e com respeito a* $(W,\mathcal{M})$ se e só se, seja qual for o conjunto $M\varepsilon\mathcal{M}$, pertencer a $\mathcal{A}$ o transformado inverso $\eta(M)$, quer dizer o conjunto formado por todos os pontos $\omega\varepsilon\Omega$ [ou $\omega\varepsilon D\varepsilon\mathcal{A}$] tais que $\xi(\omega)\varepsilon M$. Aqui podemos *omitir* qualquer uma das referências a $(\Omega,\mathcal{A})$ e a $(W,\mathcal{M})$ sempre que o contexto não deixar margens para dúvidas.

As duas versões da nossa definição de função mensurável apoiam-se em versões diferentes para a definição de ξ, correspondentes às fórmulas respectivamente 67) e 66), cujo relacionamento se viu no n.º **1** do § 21. Neste contexto, tem interesse o

Teorema 45. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$ e $[W(w),\mathcal{M}(M)]$, resultam equivalentes as duas versões da definição de mensurabilidade duma função $w = \xi(\omega)$ com domínio mensurável. Em complemento, dada uma função mensurável $\xi(\omega)$

definida em Ω e reduzida a uma constante $w_0 \varepsilon W$ sobre um conjunto não-vazio $A \varepsilon A$, então, escolhido arbitrariamente um $\tilde{w}_0 \varepsilon W$, será também mensurável a função $\tilde{\xi}(\omega)$ que se obtém igualando $\tilde{\xi}$ a ξ sobre A^- e igualando $\tilde{\xi}$ a $\tilde{w}_0$ sobre A. Por fim, é mensurável toda a função ξ com domínio $D \varepsilon A$ e degenerada em constante.»

Demonstração. a) A equivalência referida no enunciado só carece de prova caso o domínio D da fórmula 66) pertença a A sem ser vazio nem igual a Ω, situação essa que passamos a admitir. Ora, sendo $w = \xi(\omega)$ uma função definida em D e mensurável, quer dizer tal que todo o transformado inverso $\eta(M)$ está contido em D e pertence a A, e sendo $\tilde{\xi}(\omega)$ uma qualquer das ampliações de ξ definidas por 67), quer dizer tal que $\tilde{\xi}$ coincide com ξ em D e que $\tilde{\xi}(\omega) = w_0 \varepsilon W$ para todo o $\omega \varepsilon D^-$, então a inversa $\tilde{\eta}$ de $\tilde{\xi}$ faz corresponder a todo o M tal que $w_0 \varepsilon M^-$ um transformado inverso $\tilde{\eta}(M) = \eta(M) \varepsilon A$ e faz corresponder a todo o M tal que $w_0 \varepsilon M$ um transformado inverso $\tilde{\eta}(M) = \eta(M) \dotplus D^- \varepsilon A$ (veja-se o teorema 10). Por outro lado, se a ampliação $\tilde{\xi}(\omega)$ for mensurável, quer dizer tal que todo o transformado inverso $\tilde{\eta}(M) \varepsilon A$, então a inversa η de ξ faz corresponder, por um lado, a todo o M tal que $w_0 \varepsilon M^-$ um transformado inverso $\eta(M) = \tilde{\eta}(M) \varepsilon A$ e faz corresponder, por outro lado, a todo o M tal que $w_0 \varepsilon M$ um transformado inverso $\eta(M) = \tilde{\eta}(M) \wedge D \varepsilon A$. Em face do exposto, concluímos que há efectivamente equivalência entre as duas versões de mensurabilidade que estão em causa.

b) Passemos para a parte complementar do enunciado pondo $A = D^-$ e começando por supor $A^- = D$ não-vazio. Então, a hipótese de mensurabilidade da função $\xi(\omega)$ definida em Ω e a parte *a*) da nossa demonstração provam a mensurabilidade da função $\tilde{\tilde{\xi}}(\omega)$ que se obtém a partir de ξ substituindo Ω pelo novo domínio D. Em seguida, a parte *a*) da nossa demonstração prova a mensurabilidade da função $\tilde{\xi}(\omega)$ do enunciado, que não é senão a ampliação de $\tilde{\tilde{\xi}}$ que coincide com $\tilde{\tilde{\xi}}$ em D e que vale $\tilde{w}_0 \varepsilon W$ para todo o $\omega \varepsilon D^-$.

c) Falta considerar a parte complementar do enunciado no caso de se ter $A = \Omega$, caso esse em que qualquer uma das funções ξ e $\tilde{\xi}$ com domínio Ω se reduz a uma constante sobre Ω. Nesta conformidade, a nossa demonstração ficará completada se conseguirmos provar a mensurabilidade de qualquer constante definida em Ω (a qual implica, por via de a), a mensurabilidade de qualquer constante definida num conjunto $D\varepsilon A$). Ora a mensurabilidade citada em primeiro lugar ocorre efectivamente porque, se $\xi(\omega) = w_0\varepsilon W$ para qualquer $\omega\varepsilon\Omega$, então, seja qual for M, ou vale $w_0\varepsilon M$ e $\eta(M) = \Omega\varepsilon A$ ou vale $w_0\varepsilon M^-$ e $\eta(M) = O_\Omega\varepsilon A$, c. q. d.

Observação. A demonstração do teorema 45, ainda que extensa, é de estrutura muito simples e justifica conclusões por vezes muito úteis. Eis a razão por que apresentamos o teorema nesta altura, muito embora várias teses suas sejam casos particulares de outras que veremos mais adiante. Por outro lado, a nossa definição de mensurabilidade da função $w = \xi(\omega)$, quando se parte de (Ω,A) e com respeito a (W,M), estabeleceu-se através da relação

$$\eta(M)\varepsilon A \text{ para } \textit{qualquer } M\varepsilon M, \tag{79}$$

com η a designar a inversa de ξ, pelo que a mensurabilidade de ξ se conserva no caso de se substituir A por outra álgebra-σ $A' \geqslant A$ (extraída de 2^Ω) e também se conserva no caso de se substituir M por outra álgebra-σ $M' \leqslant M$ (extraída de 2^W). Na continuação deste trabalho pode aparecer esta *propriedade* (óbvia) *de dilatação-contracção*, mesmo que não se faça referência expressa a ela. Neste contexto, as facilidades *formais* mais acentuadas correspondem a um A' igual à respectiva álgebra-σ máxima e/ou a um M' igual à respectiva álgebra- mínima.

Posto isso, vamos invocar o teorema 45 para nos cingirmos à primeira definição de mensurabilidade da função $w = \xi(\omega)$, quer dizer à definição em que ξ tem o domínio Ω. Esta definição exige que o transformado inverso $\eta(M) \leqslant \Omega$ da fórmula 70) pertença a A sempre que $M\varepsilon M$. Contudo, a exigência pode reduzir-se assinalavelmente graças ao

Teorema 46. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),A(A)]$ e $[W(w),M(M)]$, então a função $w = \xi(\omega)$, definida em Ω e com inversa η, será mensurável se e só se, escolhida ao acaso uma e só uma classe G geradora da álgebra-σ M, tiver lugar a relação

$$\eta(G)\varepsilon A \text{ para } \textit{qualquer } G\varepsilon G.\text{»} \tag{79'}$$

Demonstração. Sendo G^o a álgebra-σ gerada por G, temos por hipótese $G^o = M$, pelo que a fórmula 56a) dá $G \leqslant M$. Caso a classe G seja vazia, resulta $M = \{\mathrm{W}, O_{\mathrm{W}}\}$, vamos considerar trivialmente satisfeita a relação 79') e $\eta(\mathrm{W}) = \Omega \varepsilon A$ juntamente com $\eta(O_{\mathrm{W}}) = O_{\Omega} \varepsilon A$ justifica a mensurabilidade de não importa que função ξ definida em Ω. Nesta conformidade, passamos a supor que a classe G é não-vazia.

Ora, se ξ for uma função mensurável, a relação de definição 79) impõe a relação 79') como caso particular. Logo só falta provar que 79') implica 79). Admitamos então 79') e designemos por H o conjunto genérico tal que $\eta(\mathrm{H}) \varepsilon A$. Não só os conjuntos H formam uma classe $H \geqslant G$, como também a propriedade subsequente a 78') (transcrita de L e P para A e H) mostra que H é uma álgebra-σ. Nesta conformidade, os resultados 56c) e b) conduzem a $H \geqslant M$ donde concluímos que se verifica a relação 79), c. q. d.

Exemplo 71. Se tomarmos a relação 79) para condição necessária e suficiente de mensurabilidade da função $\mathrm{w} = \xi(\omega)$ com domínio Ω, isto quando se parte de (Ω, A) e com respeito a (W, M), então a definição da álgebra-σ $\eta(M)$ induzida em Ω por ξ e M, apresentada no n.º **1**, faz com que *a relação entre álgebras-σ*

$$\eta(M) \leqslant A \tag{79''}$$

seja também uma condição necessária e suficiente para a mensurabilidade da nossa função ξ. Ora é óbvio que 79'') não pode falhar nem quando $A = 2^{\Omega}$ nem quando $M = \{\mathrm{W}, O_{\mathrm{W}}\}$, donde $\eta(M) = \{\Omega, O_{\Omega}\}$. Assim reconhecemos que o nosso conceito de função mensurável só oferece interesse quando A for diferente da álgebra-σ máxima tirada de Ω e, simultaneamente, M for diferente da álgebra-σ mínima tirada de W.

Exercício 72. Use o teorema 46 e os exemplos 41 e 43 para construir um exemplo genérico, tão simples quanto possível, duma função $\mathrm{w} = \xi(\omega)$ definida em Ω que deixe de ser mensurável, quando se parte de (Ω, A) e com respeito a (W, M).

3. Mensurabilidade de composições

Vamos juntar um *terceiro espaço mensurável* $[W'(w'),\mathcal{M}'(M')]$ aos espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$ e $[W(w),\mathcal{M}(M)]$ do n.º **2** e, além disso, vamos considerar as funções directas $w = \xi(\omega)$ e $w' = \xi'(w)$, a primeira de domínio Ω e de contradomínio $E \leqslant W$ e a outra de domínio W e de contradomínio $E' \leqslant W'$, isto nos termos da definição 67) para cada uma das funções de ligação. Então, a fórmula 70) faz corresponder as funções inversas $L = \eta(M)$ e $L' = \eta'(M')$, a primeira de domínio 2^W e de contradomínio contido em 2^Ω e a outra de domínio $2^{W'}$ e de contradomínio contido em 2^W.

As funções directas consideradas permitem formar a *função composta* ou *composição* $w' = \xi'[\xi(\omega)] = \xi''(\omega)$ onde o domínio é Ω, onde ξ' *se aproveita sobre* E, onde o contradomínio está contido em E' e onde ξ e ξ' são as chamadas *funções componentes*, respectivamente primeira e segunda. Então, escolhido *arbitrariamente* um conjunto $M' \leqslant W'$ (*não* necessariamente pertencente a $\mathcal{M}'$), não só a função inversa η' faz corresponder a M' o conjunto $\eta'(M') = L' \leqslant W$ que é formado por todos os pontos w que ξ' envia para M', como também a função inversa η faz corresponder a L' o conjunto $\eta(L') = L'' \leqslant \Omega$ que é formado por todos os pontos w que ξ envia para L'. Se pusermos $L'' = \eta[\eta'(M')] = \zeta(M')$, reconhecemos, atendendo à fórmula 73), que

$$L''^{-} = \eta([\eta'(M')]^{-}) = \eta[\eta'(M'^{-})] = \zeta(M'^{-}).$$

Assim concluímos que L'' é o conjunto formado por *todos* os ω que ξ'' envia para M', pelo que a composição ζ se identifica com a função inversa η'' de ξ'' na acepção correspondente a 70).

Em face do exposto, concluímos que vale a relação

$$\eta(\eta') \text{ é a função inversa de } \xi'(\xi), \tag{80}$$

a qual refere que a função inversa da composição de duas funções, tomadas por uma certa ordem, é a composição das suas inversas, tomadas pela ordem oposta.

Neste contexto, *vamos chamar restrição da função* ξ' *ao subespaço* W/E *e vamos representar pelo símbolo* $\xi'_{W/E}$ a função definida em $2^{W/E}$ pela relação

$$\xi'_{W/E}\ (M/E) = \xi'(M \wedge E) \text{ para qualquer } M \leqslant W, \tag{80'}$$

função essa que terá uma inversa $\eta'_{W/E}$ na acepção da fórmula 70).

Ora, dada a função de ligação $w = \xi(\omega)$, o seu contradomínio no espaço W é o conjunto $E \leqslant W$ e o seu contradomínio no subespaço W/E é o próprio subespaço. Nesta conformidade, seja qual for o conjunto $M \leqslant W$, primeiro o texto que antecede a fórmula 70) dá $\eta(M) = \eta(M \wedge E)$, em seguida a definição de restrição dum conjunto a um subespaço impõe a igualdade entre $\eta(M \wedge E)$ proveniente de W e $\eta(M/E)$ proveniente de W/E e, por fim, resulta a relação

$$\eta(M) = \eta(M \wedge E) = \eta(M/E) \text{ para qualquer } M \leqslant W. \tag{80''}$$

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções.

Posto isso, passamos a contar com as álgebras-σ A,M e M'. Nesta conformidade, temos o

Lema 47_0. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), A(A)]$ e $[W(w), M(M)]$ e dada a função $w = \xi(\omega)$ definida em Ω e com contradomínio $E \leqslant W$, haverá mensurabilidade de ξ com respeito ao espaço mensurável (W, M) se e só se houver mensurabilidade de ξ com respeito à restrição $(W, M)/E$.»

Demonstração. Comecemos por notar que $(W, M)/E =$ $= (W/E, M/E)$ é um espaço mensurável (veja-se o teorema 22 e o texto que antecede o exemplo 52). Então, a tese decorre do facto de 80'') implicar que $\eta(M) \varepsilon A$ se e só se $\eta(M/E) \varepsilon A$.

Segue o *teorema fundamental relativo à composição de funções mensuráveis* ou seja o

Teorema 47. «São dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$, $[W(w),\mathcal{M}(M)]$ e $[W'(w'),\mathcal{M}'(M')]$ e é dada a função $w = \xi(\omega)$ com domínio Ω, com contradomínio $E \leqslant W$ e mensurável com respeito a $(W,\mathcal{M})$. Então, se $w' = \xi'(w)$ for uma função com domínio W e com restrição $\xi'_{W/E}$ ao subespaço W/E, a composição $\xi'(\xi)$ resulta mensurável com respeito a $(W',\mathcal{M}')$ sempre que $\xi'_{W/E}$, referido a $(W,\mathcal{M})/E$, for mensurável com respeito a $(W',\mathcal{M}')$. Mais resumidamente: É mensurável a composição duma função mensurável com outra função tal que seja mensurável a sua restrição ao subespaço determinado pelo contradomínio da primeira componente.»

Demonstração. Se referirmos a função definida pela relação 80') a $(W,\mathcal{M})/E$, ela resulta definida em W/E e sujeita à hipótese de ser mensurável com respeito a $(W',\mathcal{M}')$, pelo que a sua inversa satisfaz à relação

$$\eta'_{W/E}\,(M') = M/E \varepsilon \mathcal{M}/E \text{ para qualquer } M' \varepsilon \mathcal{M}'.$$

Por outro lado, a hipótese da mensurabilidade de ξ com respeito a $(W,\mathcal{M})$ e o lema 47_0 impõem a relação

$$\eta(M/E)\varepsilon\mathcal{A} \text{ para qualquer } M/E\varepsilon\mathcal{M}/E.$$

Daí e da relação 80) concluímos que a função inversa da composição $\xi'_{W/E}\,(\xi)$ satisfaz à relação

$$\eta(\eta'_{W/E}\,(M'))\varepsilon\mathcal{A} \text{ para qualquer } M'\varepsilon\mathcal{M}'.$$

Nesta conformidade, a nossa tese decorre do facto de podermos equiparar as composições $\xi'_{W/E}\,(\xi)$ e $\xi'(\xi)$.

Há um caso particular importante do teorema 47 que é consubstanciado no

Corolário 47'. «Com os dados do teorema 47, a composição $\xi'(\xi)$ resulta mensurável com respeito a $(W',\mathcal{M}')$ sempre que a função ξ' for mensurável com respeito a $(W',\mathcal{M}')$. Mais resumidamente: é mensurável a composição de duas funções mensuráveis.»

Demonstração. Seja qual for $M'\varepsilon\mathcal{M}'$, a hipótese posta no enunciado dá $\eta'(M') = M\varepsilon\mathcal{M}$. Como ξ' envia para M' qualquer ponto $w\varepsilon M \wedge E \leqslant M$ e não envia para M' nenhum ponto $w\varepsilon M^{-} \wedge E$, concluímos que M/E é o conjunto formado por *todos* os pontos w que $\xi'_{W/E}$, referido a $(W,\mathcal{M})/E$, envia para M', donde $\eta'_{W/E}(M') = M/E\varepsilon\mathcal{M}/E$. Fica assim provada a mensurabilidade de $\xi'_{W/E}$ quando se parte de $(W,\mathcal{M})/E$ e com respeito a $(W',\mathcal{M}')$. Logo o teorema 47 demonstra a tese do nosso corolário, c. q. d.

Observação. Podíamos ter transformado o corolário 47' num teorema independente de demonstração simplicíssima, por recurso à relação $\eta(\eta'(M')) = \eta(M)\varepsilon\mathcal{A}$. Mas, ao proceder deste modo, podia passar despercebida a seguinte *propriedade* (implícita na demonstração do corolário 47'): «Escolhidos arbitrariamente um espaço mensurável $(W,\mathcal{M})$ e um conjunto não-vazio $E \leqslant W$, a mensurabilidade duma função definida em W, quando se parte de $(W,\mathcal{M})$ e com respeito a $(W',\mathcal{M}')$, implica a mensurabilidade da restrição dessa função ao subespaço W/E, quando se parte de $(W,\mathcal{M})/E$ e com respeito a $(W',\mathcal{M}')$.» —*Esta propriedade apresenta a faceta notável de ser válida quer* $E\varepsilon\mathcal{M}$ *quer* $E\varepsilon\mathcal{M}^{-}$ (quer E seja mensurável quer não o seja).

Exemplo 72. O caso particular $E = W$ faz coincidir as funções ξ' e $\xi'_{W/E}$ da fórmula 80'). Caso se tenha E propriamente contido em W, pode suceder que se verifique a condição suficiente do teorema 47 sem que se verifique a condição suficiente do corolário 47'. É o que sucede quando o espaço $W = \{w_0, w_1, w_2\}$, a álgebra-σ $\mathcal{M} = \{W, O_W, \{w_2\}, \{w_2\}^{-}\}$, o espaço $W' = \{w'_0, w'_1\}$, a álgebra-σ $\mathcal{M}' = 2^{W'}$, o contradomínio $E = \{w_0, w_2\}\varepsilon\mathcal{M}^{-}$, o transformado $\xi'(\{w_1\}) = \{w'_0\}$ e, por fim, o transformado $\xi'(\{w_1\}^{-}) = \{w'_1\}$. A situação será a mesma se mudarmos E para $\{w_2\}\varepsilon\mathcal{M}$ e se conservarmos os dados restantes.

Exemplo 73. Caso se tenha $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ [ou $\mathcal{M}' = \{W', O_{W'}\}$], o exemplo 71 mostra que a função composta e a primeira [ou segunda] função componente do teorema 47 serão mensuráveis em relação aos espaços mensuráveis incidentes, *mesmo que se liberte a segunda* [ou *primeira*] *função componente de qualquer compromisso.* Optando pela versão $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, podemos ilustrar a afirmação feita com a particularização referida no exemplo 72, desde que aí mudemos E para $\{w_0, w_1\}$ e desde que aí conservemos os dados restantes (mudança essa que faz com que nem sequer se verifique a condição suficiente do corolário 47').

4. Restrição a um conjunto mensurável

Dados os espaços mensuráveis do n.º **2**, suponhamos que a função $w = \xi(\omega)$ tem o domínio Ω.

Escolhido arbitrariamente um conjunto $K \leqslant \Omega$, vamos chamar *restrição da função* ξ *a* K ou *função* ξ *truncada por* K e, além disso, *vamos representar pelo símbolo* $\xi_K(\omega)$ ou *abreviadamente por* ξ_K *qualquer* função definida em Ω que se identifique com ξ sobre K e que, caso valha K propriamente contido em Ω, se reduza sobre K^- a alguma constante $w_0 \varepsilon W$, seleccionada segundo algum critério considerado conveniente na ocasião. † Então, torna-se óbvio que ξ_Ω se identifica com ξ e que ξ_{0_Ω} degenera em constante.

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções. Posto isso, podemos introduzir o conceito referido para chegarmos ao

Teorema 48. «Propostos os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e $[W(w), \mathcal{M}(M)]$ e sendo $w = \xi(\omega)$ uma função definida em Ω e mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$, então será também uma função mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$ toda a restrição $\xi_A(\omega)$ para a qual o conjunto de truncagem seja um conjunto mensurável $A \varepsilon \mathcal{A}$.»

Demonstração. Suponhamos que o conjunto A e a função ξ satisfazem às condições do enunciado. Como o caso $A = \Omega$ é mesmo óbvio, vamos admitir a relação A propriamente contido em Ω. Então, $\xi_A(\omega) = \xi(\omega)$ sobre A e $\xi_A(\omega) = w_0 \varepsilon W$ sobre A^-. Sendo η e η_A as funções inversas respectivamente de ξ e de ξ_A, isto na acepção da fórmula 70), sucede que, escolhido arbitrariamente

---

† Não se deve confundir a restrição de ξ ao *conjunto* K, eventualmente vazio, com a restrição de ξ ao *subespaço* Ω/K, com K necessariamente não-vazio (compare-se com o n.º 3).

um conjunto $M \varepsilon \mathcal{M}$, a hipótese $w_0 \varepsilon M^-$ implica $\eta_A(M) = A \wedge \eta(M) \varepsilon \mathcal{A}$ e, além disso, a hipótese $w_0 \varepsilon M$ implica $\eta_A(M) = (A \wedge \eta(M)) \dotplus A^- \varepsilon \mathcal{A}$. Concluímos assim que a função ξ_A é efectivamente mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$, c. q. d.

Observação. O caso $A^- = \Omega$ está incluído na demonstração precedente, embora já tenha sido considerado na parte final do teorema 45 (caso $D = \Omega$).

Exemplo 74. Consideremos os espaços mensuráveis do teorema 48, suponhamos que $\mathcal{A} \neq 2^\Omega$ e tomemos uma função mensurável $\xi(\omega)$, definida em Ω e reduzida a uma constante $w_0 \varepsilon W$. Então, se o conjunto $K \varepsilon \mathcal{A}^-$, temos a seguinte situação: por um lado, a transcrição da propriedade posta na observação ao corolário 47' de $W', \mathcal{M}', W, \mathcal{M}$ e E para $W, \mathcal{M}, \Omega, \mathcal{A}$ e K mostra que a restrição do nosso ξ ao subespaço Ω/K é uma função mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$; por outro lado, a restrição do nosso ξ ao conjunto K deixa de ser uma função mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$, desde que se escolha um $\tilde{w}_0 \neq w_0$ para determinação dessa restrição nos pontos $\omega \varepsilon K^-$ e desde que se admita a existência dum conjunto $M \varepsilon \mathcal{M}$ tal que $w_0 \varepsilon M$ e $\tilde{w}_0 \varepsilon M^-$. † Vale a pena comparar a situação descrita com a nota posta no princípio deste n.º.

5. **Funções e. m. e funções s. m.**

Dados os espaços mensuráveis dos n.^os^ **2** e **4** e dada uma função (directa) $w = \xi(\omega)$, sabemos, pelo que atrás ficou exposto, que não se perde em generalidade supondo que o domínio de ξ é Ω, isto quer para efeitos da definição de função elementar ou simples quer para efeitos da definição de função com domínio mensurável e ela própria mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$.

---

† Embora a restrição do texto não seja mensurável, ela admite a constante original w_0 como restrição a K; logo ela proporciona um exemplo duma função não-mensurável que admite uma restrição mensurável a um conjunto não-mensurável.

Partindo então de (Ω, A), vamos chamar *função e. m. com respeito a* (W, M) a toda a função ξ definida em Ω, elementar e mensurável com respeito a (W, M) e, além disso, vamos chamar *função s. m. com respeito a* (W, M) a toda a função ξ definida em Ω, simples e mensurável com respeito a (W, M). Claro que uma função s. m. com respeito a (W, M) é também uma função e. m. com respeito a (W, M) e que uma função (degenerada em) constante sobre Ω é também uma função s. m. com respeito a (W, M) (veja-se a parte final do teorema 45).

Posto isso, temos o

Teorema 49. «Propostos os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ e $[W(w), M(\mathrm{M})]$ e dada a função $w = \xi(\omega)$, elementar e definida em Ω, seja η a função inversa de ξ na acepção da fórmula 70), seja $E = \{w_0, w_1, w_2, \ldots\} \leqslant W$ o contradomínio de ξ e sejam $E_k (k = = 0,1,2, \ldots)$ os átomos da restrição $(W, M)/E$, quando reinterpretados como conjuntos contidos em W. Então, ξ será uma função e. m. com respeito a (W, M) se e só se, escolhido arbitrariamente um e só um valor k' de k, tiver lugar a relação

$$\eta(E_k) \varepsilon A \text{ para qualquer } k \neq k'.» \tag{81}$$

Demonstração. Seja $w = \xi(\omega)$ uma função elementar com domínio Ω. Comecemos por notar que o contradomínio E, certamente não-vazio, tem a forma referida no enunciado, isto devido à definição de função elementar. Então, não só o teorema 22 institui a classe M/E em álgebra-σ tirada do espaço intransnumerável W/E, como também o corolário 17' assegura a existência duma decomposição irredutível do espaço mensurável $(W, M)/E$, a qual se compõe de conjuntos não-vazios ou (melhor) de átomos $M_k/E (k = 0,1,2, \ldots)$ disjuntos dois a dois, com $M_k \varepsilon M$ para cada k e tais que a fórmula 25a) e a definição de decomposição dum espaço mensurável conduzem a $E/E = W/E = \dot{\sum_k} (M_k/E)$. Assim a reinterpretação dos conjuntos M_k/E como conjuntos $M_k \wedge E = E_k$ contidos em W (e até em E), *obviamente não-vazios e disjuntos dois a dois*, faz com que a fórmula 27b) dê $E/E =$

$= \overset{V}{\underset{k}{}} (M_k/E) = (\overset{V}{\underset{k}{}} M_k)/E$, donde, atendendo às fórmulas 25a) e 13), a relação

$$E = E \wedge E = (\overset{V}{\underset{k}{}} M_k) \wedge E = \dot{\sum_k} E_k, \text{ com } E_k \neq O_k \text{ para cada } k. \tag{82}$$

Daí e da fórmula 72') concluímos que $\Omega = \eta(E) = \dot{\sum_k} \eta(E_k)$. Portanto, as relações 18), 81) e 54) impõem $\eta(E_{k'}) \varepsilon A$, donde concluímos que há *equivalência* entre a relação 81) e a relação

$$\eta(E_k) \varepsilon A \text{ para qualquer } k \text{ admissível.} \tag{83}$$

Neste contexto convém esclarecer que, caso 0 seja o único valor admissível para k, podemos considerar trivialmente satisfeita a relação 81), enquanto a relação 83) se torna trivial sob a forma $\eta(E_0) = \eta(E) = \Omega \varepsilon A$. Por outras palavras, afasta-se a eventualidade duma excepção para a equivalência entre as relações 81) e 83).

Posto isso, vamos conduzir a demonstração tomando por tese que a relação 83) é a condição necessária e suficiente do nosso teorema.

Admitamos então a condição 83). Seja qual for o conjunto $M \varepsilon M$, o teorema 14 permite igualar M/E a uma soma parcial (eventualmente vazia) $\dot{\sum_l} (M_l/E)$ tirada de $\dot{\sum_k} (M_k/E)$, pelo que as relações 80"), 72') e 54b) dão

$$\eta(M) = \eta(M/E) = \dot{\sum_l} \eta(M_l/E) = \dot{\sum_l} \eta(E_l) \varepsilon A,$$

donde concluímos que a nossa função ξ é uma função mensurável com respeito a (W,M) e, portanto, é uma função e. m. com respeito a (W,M).

Em face do exposto, só falta provar que a mensurabilidade de ξ com respeito a (W,M) impõe a relação 83). Ora a mensurabilidade referida e o lema 47_0 impõem a mensurabilidade de ξ com respeito a $(W,M)/E$, pelo que pertencem a A todos os transformados inversos $\eta(M_k/E) = \eta(E_k)$, c. q. d.

Observação. O caso das funções s. m. com respeito a (W,M) é o caso particular do teorema 49 em que o conjunto E é finito. — Talvez valha a pena acrescentar que a parte da demonstração precedente onde se começa por admitir a condição 83) é uma parte que consente a seguinte alternativa: Primeiro obtém-se $\eta(M_k/E)\varepsilon A$ para cada k admissível, depois o teorema 14 assegura que os conjuntos ou átomos M_k/E formam uma classe geradora da álgebra-σ M/E, em seguida o teorema 46 impõe a mensurabilidade de ξ com respeito a $(W,M)/E$ e, por fim, o lema 47_0 conduz à mensurabilidade de ξ com respeito a (W,M). Contudo, os conjuntos E_k não formam obrigatoriamente uma classe geradora de M e nem sequer pertencem obrigatoriamente a M. Examine-se, a propósito, o caso em que $E = \{w_0\} = E_0$ e em que M ou é a álgebra-σ gerada pela classe $\{\{w_2\}\}$ ou é a álgebra-σ gerada pela classe $\{\{w_0\}, \{w_1\}\}$, ambas extraídas de $W = \{w_0, w_1, w_2\}$.

Exemplo 75. *A condição* 81) *do teorema* 49 *tem valor construtivo* no sentido de facultar o acesso directo a funções e. m. com respeito a (W,M) não abrangidas pela parte final do teorema 45 (funções constantes) nem pelo exemplo 71 (A álgebra-σ máxima ou M álgebra-σ mínima). Exemplifiquemos com o caso em que: $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, *ad infinitum*$\}$, o espaço mensurável (Ω,A) admite a decomposição irredutível $\{\{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \ldots\}$, o espaço $W = \{w_0, w_1, w_2, \ldots$, *ad infinitum*$\}$, a álgebra-σ $M = 2^W$, o contradomínio $E = W$ donde $E_k = \{w_k\}$ para $k = 0,1,2, \ldots$, o transformado inverso $\eta(E_k) = \{\omega_{4k}, \omega_{4k+1}, \omega_{4k+2}, \omega_{4k+3}\}$ para todo o k e, seja qual for k, vale $w_k = \xi(\omega_{4k+h})$ para $h = 0,1,2,3$. A função $w = \xi(\omega)$ assim construída tem o domínio Ω e é e. m. com respeito a (W,M) sem ser uma função simples, mas passa a ser uma função s. m. com respeito a (W,M) se supusermos que Ω tem um último ponto de índice congruente com 4 módulo 3, que W fica com a quarta parte dos pontos de Ω e que se mantêm as condições restantes.

Exercício 73. Dados os espaços mensuráveis do teorema 47, prove o seguinte: «Para que a composição de duas funções resulte uma função elementar [ou simples], é condição suficiente que a primeira componente seja uma função elementar [ou simples] e, por outro lado, é condição necessária que seja elementar [ou simples] a restrição da outra função componente ao subespaço obtido a partir do contradomínio da primeira componente. Em particular, se forem mensuráveis a primeira componente e a restrição referida a propósito da outra componente, a qualidade da composição de ser uma função e. m. [ou s. m.] tem por condição suficiente que a primeira componente seja uma função e. m. [ou s. m.] e, por outro lado, tem por condição necessária que a restrição em causa seja uma função e. m. [ou s. m.].»

Exercício 74. Dados os espaços $\Omega(\omega)$ e $W(w)$, a função $w = \xi(\omega)$ elementar (e definida) em Ω e a álgebra-σ $\mathcal{M}(M)$ extraída de W, mostre que ξ resulta uma função e. m. com respeito a $(W,\mathcal{M})$ desde que se transforme Ω em espaço mensurável através duma álgebra-σ $\mathcal{A}$ que contenha a álgebra-σ gerada pela classe dos conjuntos $\eta(E_k)$ da fórmula 81).

6. **Representações mensuráveis**

Retomando mais uma vez os espaços mensuráveis dos n.^{os} **2** e **4**, suponhamos que a função $w = \xi(\omega)$ tem o domínio Ω e o contradomínio $E \leqslant W$. Então, qualquer representação compatível [ou intransnumerávelmente compatível ou finitamente compatível] com ξ, quer seja canónica quer não o seja, pode ser dada pela fórmula 76) e é denominada *representação mensurável* [ou *mensurável e intransnumerável* ou *mensurável e finita*] se e só se os respectivos conjuntos K_t, com transformados directos $\xi(K_t) = \{w_t\} \leqslant W$, forem todos mensuráveis em relação a $(\Omega,\mathcal{A})$.

Nesta conformidade, vamos considerar duas funções $\xi(\omega)$ e $\rho(\omega)$, cada uma delas com domínio Ω, com contradomínio contido em W e com representação mensurável [ou mensurável e intransnumerável ou mensurável e finita], esta dada pela fórmula 76) no caso de ξ e pela fórmula 76') no caso de ρ. Então, a fórmula 77) e a propriedade 54b) facultam representações compatíveis e paralelas para ξ e ρ que não podem deixar de ser *ambas representações mensuráveis* [ou *mensuráveis e intransnumeráveis* ou *mensuráveis e finitas*], facto esse importante para o estudo simultâneo de duas funções do tipo referido, eventualmente elementares ou até simples.

Caso a função ξ supracitada seja elementar, a sua representação canónica dada pela fórmula ou 75) ou 75'), as propriedades da adição de conjuntos e as propriedades dos conjuntos E_k do teorema 49, com destaque para a relação 82), permitem estabelecer *a seguinte variante da representação canónica de* ξ:

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_k}\,(\dot{\sum_{w_h \varepsilon E_k}} [\{w_h\} \cdot I_{\eta(\{w_h\})}(\omega)]), \tag{84}$$

em relação à qual se verifica a condição 83) se e só se ξ for uma função e. m. com respeito a (W,M).

Por outro lado, a definição de função mensurável torna óbvio o

Teorema 50. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),A(A)]$ e $[W(w),M(M)]$ e dada a função $w = \xi(\omega)$ com domínio Ω, com contradomínio E e mensurável [ou e. m. ou s. m.] com respeito a (W,M), então a hipótese $\{w\}\varepsilon M$ para todo o ponto $w \varepsilon E$ obriga a representação canónica de ξ a ser uma representação mensurável [ou mensurável e intransnumerável ou mensurável e finita].»

Exemplo 76. Consideremos o caso especial em que o espaço Ω tem mais do que um ponto, A propriamente contido em 2^Ω, a função $\xi(\omega)$ vale w_0 ou $w_1 \neq w_0$ conforme $\omega \varepsilon C \varepsilon A^-$ ou $\omega \varepsilon C^-$, o espaço W tem no mínimo três pontos e, por fim, $M = \{W, O_W, \{w_0, w_1\}, \{w_0, w_1\}^-\}$, donde $\{w_0, w_1\} = E = E_0$ e $\eta(E_0) = \Omega \varepsilon A$. Ora o teorema 49 garante que ξ é uma função s. m. com respeito a (W,M). Neste caso, o transformado inverso C de $\{w_0\} = F_0$ propriamente contido em E_0 não pertence a A e, portanto, a representação canónica 84), dada pela expressão

$$\xi(\{\omega\}) = [\{w_0\} \cdot I_{\eta(\{w_0\})}(\omega)] \dot{+} [\{w_1\} \cdot I_{\eta(\{w_1\})}(\omega)],$$

deixa de ser uma representação mensurável, coisa essa que não poderia acontecer se ξ fosse s. m. e F_0 pertencesse a M juntamente com E_0. Escusado será dizer que $\eta(\{w_0\}) = C$ e $\eta(\{w_1\}) = C^-$, pelo que basta que (Ω,A) admita um átomo contendo C ou C^- para que nenhuma representação compatível com ξ seja uma representação mensurável — isto apesar da mensurabilidade de ξ

com respeito a (W,M). Nesta conformidade, as hipóteses $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, $A = \{\Omega, O_\Omega, \{\omega_2\}, \{\omega_2\}^-\}$ e $C^- = \{\omega_1\}$ impõem a existência de *funções mensuráveis (s. m.) sem qualquer representação compatível que seja mensurável.*

Exemplo 77. Retomemos a função $w = \xi(\omega)$ do exemplo 75, uma função e. m. com respeito a (W,M), na versão em que o espaço Ω é infinito [ou finito]. Então, a relação $M = 2^W$ faz com que se verifique a hipótese referida a meio do enunciado do teorema 50. Logo a representação canónica de ξ, dada pela fórmula 75'), não pode deixar de ser uma representação mensurável e intransnumerável [ou finita]. Por outro lado, se tomarmos a partição de Ω que é compatível com ξ e que é formada ou pelos conjuntos $\{\omega_{2j}, \omega_{2j+1}\}$ $(j = 0,1,2, \ldots)$ ou pelos conjuntos $\{\omega_i\}$ $(i = 0,1, 2, \ldots)$, então a correspondente representação intransnumeravelmente [ou finitamente] compatível

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_j} [\xi(\{\omega_{2j}, \omega_{2j+1}\}) \cdot I_{\{\omega_{2j}, \omega_{2j+1}\}}(\omega)]$$

ou

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_i} [\xi(\{\omega_i\}) \cdot I_{\{\omega_i\}}(\omega)]$$

é mensurável no primeiro caso e deixa de ser mensurável no outro caso.

Exercício 75. Suponha que $\Omega(\omega)$ é uma recta real $X(x)$, que L é a álgebra do exercício 38 (ou seja a classe formada pelos conjuntos intransnumeráveis contidos em X e pelos seus complementos), que $C = \{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e que a função $w = \xi(\omega)$ tem o domínio Ω, tem o contradomínio W e é *univalente,* quer dizer tal que não existem determinações de ω distintas entre si e conducentes ao mesmo w. Nesta conformidade, mostre: que (Ω,A) é um espaço mensurável, quando se põe $A = L$; que (W,M) é outro espaço mensurável, quando se põe $M = \{W, O_W, \xi(C), (\xi(C))^-\}$; que a função considerada não é mensurável com respeito a (W,M); que, *apesar disso,* a representação canónica de ξ é uma representação mensurável.

§ 23 — COMPLEMENTOS AO ESTUDO DAS FUNÇÕES MENSURÁVEIS MAIS GERAIS

1. Cortes e transformados inversos

Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e $[W(w), \mathcal{M}(M)]$, admitamos que Ω é o produto dos espaços $\Omega_t(\omega_t)$, com o índice t a percorrer uma família T, na qual se supõe escolhido um dispositivo de entrada para as (pelo menos duas) determinações de t. Então, o ponto genérico $\omega \varepsilon \Omega$ será o ponto $(\omega_t, t \varepsilon T)$ cujas coordenadas são os pontos genéricos $\omega_t \varepsilon \Omega_t$.

Posto isso, vamos retomar a situação descrita no n.º **1** do § 9 introduzindo os espaços-produtos parciais

$$\Omega^*(\omega^*) = \underset{t=t^*}{\times} \Omega_t(\omega_t) \quad \text{e} \quad \Omega^{**}(\omega^{**}) = \underset{t=t^{**}}{\times} \Omega_t(\omega_t),$$

marginais de Ω cada um em relação ao outro, o primeiro de ponto genérico $\omega^* = (\omega_{t^*}, t^* \varepsilon T^*)$ e o outro de ponto genérico $\omega^{**} = (\omega_{t^{**}}, t^{**} \varepsilon T^{**})$. Além disso, vamos seleccionar arbitrariamente um ponto fixo $\bar{\omega}^* = (\bar{\omega}_{t^*}, t^* \varepsilon T^*)$.

Nesta conformidade, seja qual for a função $w = \xi(\omega)$ com domínio Ω e com contradomínio $E \lessdot W$, vamos chamar *corte (feito) na função ξ pelo ponto $\bar{\omega}^*$* e vamos representar pelo símbolo $\xi / \bar{\omega}^*$ ou $\xi(\omega) / \bar{\omega}^*$ a função definida pela relação

$$\xi(\omega) / \bar{\omega}^* = [\xi(\omega_t, t \varepsilon T)]_{\omega^* = \bar{\omega}^*} \tag{85}$$

onde o segundo membro refere a função definida em Ω^{**} que se obtém, fixando em ξ todos os argumentos ω_{t*} nas correspondentes determinações $\bar{\omega}_{t*}$ e conservando a plena variabilidade de todos os argumentos ω_{t**}, quer dizer do ponto $\omega^{**}\varepsilon\Omega^{**}$. A função assim definida resulta de ξ e de $\bar{\omega}^*$ por uma operação a que vamos atribuir a designação já atribuída ao seu resultado. Neste contexto, é uso designar $\bar{\omega}^*$ por *ponto cortante* e $\xi(\omega)$ por *função cortada.*

Ora, atendendo à fórmula 49a), podemos afirmar que o corte $\xi/\bar{\omega}^*$ tem o domínio $\Omega/\bar{\omega}^*$. Além disso, é óbvio que $\xi/\bar{\omega}^*$ tem um contradomínio $E_{\bar{\omega}^*} \leqslant E$ e, caso os números 0 e 1 sejam valores admissíveis para ξ, pode particularizar-se para a indicatriz $[I_A(\omega_t, t\varepsilon T)]_{\omega^*=\bar{\omega}^*}$ que a fórmula 48) faz corresponder à indicatriz I_A de qualquer $A \leqslant \Omega$ (quer $A\varepsilon\mathcal{A}$ quer $A\varepsilon\mathcal{A}^-$). † Por outro lado, a dedução feita no texto que precede o exercício 29 é uma dedução que se adapta às funções ξ mais gerais agora consideradas, permitindo concluir que a operação de corte (global) introduzida através da fórmula 85) pode resolver-se em operações de corte (parciais), associativas e comutativas.

Por fim, seja η a função inversa de ξ e seja $\eta_{\bar{\omega}^*}$ a função inversa de $\xi_{\bar{\omega}^*} = \xi/\bar{\omega}^*$, ambas as inversas na acepção da fórmula 70). Então, escolhido arbitrariamente um conjunto $M \leqslant W$, o corte $\eta(M)/\bar{\omega}^*$ terá a indicatriz $[I_{\eta(M)}]_{\omega^*=\bar{\omega}^*}$ (dada pela fórmula 48)), com valor igual a 1 se e só se $\omega^* = \bar{\omega}^*$ simultaneamente com $\omega\varepsilon\eta(M)$ ou, equivalentemente, se e só se $\xi_{\bar{\omega}^*}$ enviar ω^{**} para M ou, ainda equivalentemente, se e só se $\omega^{**}\varepsilon\eta_{\bar{\omega}^*}(M)$. Nesta conformidade, ficam identificadas as indicatrizes de $\eta(M)/\bar{\omega}^*$ e de $\eta_{\bar{\omega}^*}(M)$ e obtemos a *igualdade*

$$\eta_{\bar{\omega}^*}(M) = \eta(M)/\bar{\omega}^* \tag{86}$$

entre o transformado inverso do corte feito na função original e o corte feito no transformado inverso da função original.

---

† Fixados A e $\bar{\omega}^*$, a fórmula 48) pode resumir-se dizendo que *a indicatriz do corte é o corte da indicatriz.*

Exercício 76. Use o exemplo 25 e a fórmula 48) para construir um exemplo em que duas funções, tomadas em Ω e diferentes entre si, sejam cortadas por um ponto de Ω^* segundo cortes iguais um ao outro.

2. **Corte feito numa função mensurável**

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções.

Supondo agora que o nosso ponto de partida é o espaço mensurável (Ω,A) do n.º **1**, sabemos, pela parte final do n.º **2** do § 16, que

$$(\Omega,A)/\bar{\omega}^* = (\Omega/\bar{\omega}^*,A/\bar{\omega}^*)$$

é outro espaço mensurável, o qual, uma vez fixado $\bar{\omega}^*$, se obtém a partir de (Ω,A) por uma operação de corte (global) que pode resolver-se em operações de corte (parciais), comutativas e associativas (nos mesmos moldes válidos para a função ξ).

Ora, se quisermos saber como as coisas se passam quando se instituem conjuntos mensuráveis em Ω e em W e quando simultaneamente houver mensurabilidade da função de ligação ξ, então a resposta ser-nos-á dada através do

Teorema 51. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),A(\mathrm{A})]$ e $[\mathrm{W}(\mathrm{w}),M(\mathrm{M})]$, suponha-se que Ω é o produto de dois ou mais espaços-factores, considerem-se dois espaços $\Omega^*(\omega^*)$ e $\Omega^{**}(\omega^{**})$ que sejam marginais de Ω cada um em relação ao outro, escolha-se arbitrariamente um e só um ponto cortante $\bar{\omega}^*\varepsilon\Omega$ e, por fim, admita-se que $\mathrm{w} = \xi(\omega)$ é uma função definida em Ω e mensurável com respeito a (W,M). Então, se partirmos do espaço mensurável igual ao corte $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, o corte $\xi(\omega)/\bar{\omega}^*$ resulta uma função definida em $\Omega/\bar{\omega}^*$ e mensurável com respeito a (W,M). Em estilo mais abreviado e menos preciso: É mensurável qualquer corte feito numa função mensurável.»

Demonstração. Sendo η e $\eta_{\bar{\omega}^*}$ as funções inversas utilizadas na fórmula 86), então, escolhido arbitrariamente um conjunto $\mathrm{M}\varepsilon M$, primeiro a hipótese da mensurabilidade de ξ com respeito a (W,M) impõe a relação $\eta(M)\varepsilon A$, em seguida a definição de corte feito numa classe por um ponto implica a relação $\eta(M)/\bar{\omega}^*\varepsilon A/\bar{\omega}^*$ e, por fim, a fórmula 86) conduz à relação $\eta_{\bar{\omega}^*}(M)\varepsilon A/\bar{\omega}^*$, ficando assim estabelecida a mensurabilidade com respeito a (W,M) da função $\xi/\bar{\omega}^*$, quando referida a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, c. q. d.

Exemplo 78. Vale a seguinte *propriedade:* «Com os dados do teorema 51, a hipótese de a função mensurável $\xi(\omega)$ ou ser uma função simples ou ser uma função elementar ou ter uma representação mensurável da forma

$$\dot{\sum_{s\varepsilon S}} [\{w_s\} \cdot I_{K_s}(\omega)], \text{ com } K_s\varepsilon A \text{ para cada s,}$$

implica que o corte mensurável $\xi(\omega)/\bar{\omega}^*$, referido ao espaço mensurável $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, se comporte respectivamente do seguinte modo: ou é uma função simples ou é uma função elementar ou tem uma representação mensurável que se obtém *suprimindo as parcelas com indicatrizes identicamente nulas em*

$$\dot{\sum_{s\varepsilon S}} [\{w_s\} \cdot I_{K_s/\bar{\omega}^*}(\omega^{**})], \text{ com } K_s/\bar{\omega}^*\varepsilon A/\bar{\omega}^* \text{ para cada s.»}$$

Com efeito, as duas primeiras versões do enunciado são uma consequência imediata da relação $E \geqslant E_{\bar{\omega}^*}$ entre o contradomínio de ξ e o de $\xi/\bar{\omega}^*$. Quanto à terceira versão do enunciado, o primeiro somatório é uma representação compatível com $\xi(\{\omega\})$ segundo a fórmula 76) transcrita de t e T para s e S, representação essa que se supõe mensurável de acordo com a definição do n.º **6** do § 22, que vale para qualquer ω e que pode ser particularizada, pondo $\omega_{t^*} = \bar{\omega}_{t^*}$ para cada $t^*\varepsilon T^*$. Procedendo do modo indicado, a correspondência entre pontos e conjuntos singulares e as fórmulas 85) e 48) permitem escrever

$$\xi_{\bar{\omega}^*}(\{\omega^{**}\}) = \xi(\{\omega\})/\bar{\omega}^* = \dot{\sum_{s\varepsilon S}} (\{w_s\} \cdot [I_{K_s}(\omega)]_{\omega^*=\bar{\omega}^*}) =$$

$$= \dot{\sum_{s\varepsilon S}} [\{w_s\} \cdot I_{K_s/\bar{\omega}^*}(\omega^{**})],$$

conduzindo a supressão supracitada via, fórmulas 49) e 50), a uma representação compatível com o corte $\xi/\bar{\omega}^*$ referido a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, representação essa que não pode deixar de ser mensurável, em virtude de, seja qual for s, o corte $K_s/\overline{\omega}^*$ pertencer por definição a $A/\overline{\omega}^*$.

Exercício 77. Mostre que a propriedade do exemplo 78 subsiste se suprimirmos no seu enunciado o adjectivo mensurável antes dos símbolos $\xi(\omega)$ e $\xi(\omega)/\overline{\omega}^*$.

Exercício 78. Sendo W(w) uma recta real e sendo $\Omega(\omega)$ o produto do espaço $\Omega_1(\omega_1) = \{1,2\} = \Omega^*(\omega^*)$ pela recta real $\Omega_2(\omega_2) = \Omega^{**}(\omega^{**})$, considere a álgebra-$\sigma$ mínima A tirada de Ω e a álgebra-σ máxima M tirada de W, tome $\overline{\omega}_1 = 1$ para ponto cortante fixo e suponha que $w = \xi(\omega) = \xi(\omega_1, \omega_2)$ não só vale 0 sempre que $\omega_1 = 1$, como também toma o valor da segunda coordenada ω_2 sempre que $\omega_1 = 2$. Nesta conformidade, mostre que a função ξ não é simples nem é elementar nem é mensurável com respeito a (W,M) nem admite qualquer representação mensurável, isso embora o corte $\xi/\overline{\omega}_2$ seja simples, seja elementar, seja mensurável com respeito a (W,M) e tenha uma representação canónica mensurável. O que sucede às representações compatíveis com o corte que não são canónicas?

3. Funções marginais e coordenadas

Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),A(\mathrm{A})]$ e $[W(w),M(\mathrm{M})]$, passamos a supor que, seja qual for Ω, *o espaço* W *é igual ao produto de pelo menos dois espaços-factores* $W_t(w_t)$ $(t \varepsilon T)$, isto sob a reserva de nos eximirmos a qualquer incompatibilidade notacional com situações anteriores, por exemplo com a relativa à fórmula 76). Então, o ponto genérico $w \varepsilon W$ será o ponto $(w_t, t \varepsilon T)$ cujas coordenadas são os pontos genéricos $w_t \varepsilon W_t$.

Posto isso, vamos adaptar a posição descrita no n.º 1 do § 9 introduzindo os espaços-produtos parciais

$$W^*(w^*) = \underset{t=t^*}{\times} W_t(w_t) \quad \text{e} \quad W^{**}(w^{**}) = \underset{t=t^{**}}{\times} W_t(w_t),$$

marginais de W cada um em relação ao outro, o primeiro de ponto genérico $w^* = (w_{t^*}, t^* \varepsilon T^*)$ e o outro de ponto genérico $w^{**} = (w_{t^{**}}, t^{**} \varepsilon T^{**})$.

Nesta conformidade, seja qual for a função $w = \xi(\omega)$, definida em Ω e com contradomínio $E \leqslant W$, vamos chamar *função marginal de* ξ *tomada em* W^* ou *função obtida por marginação de* ξ *com respeito a* W^{**} à função $w^* = \xi^*(\omega)$ que se obtém, suprimindo em cada ponto w pertencente ao cilindro W (veja-se o corolário 8') todas as coordenadas w_t tais que $t \varepsilon T^{**}$, procedimento esse que óbviamente não afecta a função ξ nos eventuais pontos $w \varepsilon E^- \neq O_W$. No caso particular de W^* se reduzir a um só factor W_{t*} ,a função marginal também pode ser representada por $w_{t*} = \xi_{t*}(\omega)$ e também pode ser denominada *coordenada* (por vezes componente) *de índice* t^* da função original ou *marginada* $\xi(\omega)$, mais simplesmente coordenada número n ou n-ésima coordenada se $T = \{1,2, \ldots ,n, \ldots\}$ e se o único $t^* = n$.

É óbvio que a supressão de todas as coordenadas w_{t**}, supostas em número superior a 1, pode ser feita por fases às quais correspondem marginações parciais de ξ que serão associativas e comutativas. Por outro lado, torna-se claro, por um lado, que a função marginal ξ^* tem o mesmo domínio Ω da função marginada ξ e, por outro lado, que o contradomínio de ξ^* é um conjunto $E^* \leqslant W^*$.

Por fim, seja η a inversa da função marginada ξ e seja η^* a inversa da função marginal ξ^*, ambas as inversas na acepção da fórmula 70). Então, escolhido arbitrariamente um cilindro $C \leqslant W$ com base $C^* \leqslant W^*$, qualquer ponto ω enviado por ξ para o cilindro C é também um ponto ω enviado por ξ^* para C^*, isto devido à definição dos cilindros e das suas bases; por outro lado, qualquer ponto enviado por ξ para o cilindro C^- é um ponto ω enviado por ξ^* para $(C^*)^-$, isto devido ao corolário 8' e à relação 43b). Em face do exposto, o conjunto formado por *todos* os pontos ω que ξ envia para C é o mesmo que o conjunto formado por *todos* os pontos ω que ξ^* envia para C^*; fica assim provada a relação

$$\eta(C) = \eta^*(C^*) \tag{87}$$

para qualquer cilindro $C \leqslant W$ com base $C^* \leqslant W^*$

ou seja a igualdade entre o transformado inverso (em relação à função marginada) *dum cilindro e o transformado inverso* (em relação à função marginal) *da correspondente base.*

Exercício 79. Dados os espaços Ω,W_1 e W_2, cada um com dois pontos, forme duas funções de ligação entre Ω e $W_1 \times W_2$ que sejam distintas entre si e que tenham primeiras coordenadas iguais entre si.

4. Marginação de funções mensuráveis

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções.

Entrando agora em conta com as álgebras-σ A e M do n.º **3**, então o teorema 27, o corolário 27' e as considerações subsequentes mostram que são álgebras-σ não só a classe $C(M)$ formada pelos cilindros pertencentes a M que tenham base em W*, como também a classe $C^*(M)$ obtida pela marginação de M ou de $C(M)$ com respeito a W**. Por outro lado, o espaço mensurável marginal $(W,C(M))^* = (W^*,C^*(M))$ é obtido por meio duma marginação (global) de (W,M) que pode resolver-se em marginações (parciais), comutativas e associativas, nos mesmos moldes válidos para a função ξ.

Posto isso, temos o

Teorema 52. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega),A(A)]$ e $[W(w),M(M)]$, suponha-se que W é o produto de dois ou mais espaços-factores, escolham-se arbitrariamente dois espaços $W^*(w^*)$ e $W^{**}(w^{**})$ que sejam marginais de W cada um em relação ao outro e, por fim, admita-se que $w = \xi(\omega)$ é uma função definida em Ω e mensurável com respeito a (W,M). Então, a função marginal $w^* = \xi^*(\omega)$ resulta uma função definida em Ω e mensurável com respeito ao espaço mensurável marginal de (W,M), tomado em W*; em particular, cada coordenada de $\xi(\omega)$ resulta uma função definida em Ω e mensurável com respeito ao espaço mensurável marginal de (W,M), tomado no factor de W que corresponde à coordenada considerada. Em estilo mais abreviado e menos preciso: É mensurável toda a função obtida por marginação duma função mensurável; em particular, é mensurável qualquer coordenada duma função mensurável.»

Demonstração. Que toda a função marginal de ξ tem o domínio Ω, vimo-lo no texto subsequente à definição de marginação duma função. Por outro lado, sendo η e η^* as funções inversas utilizadas na fórmula 87), então, escolhido arbitrariamente um cilindro $C \varepsilon C(M)$, primeiro a hipótese da mensurabilidade de ξ com respeito a (W,M) impõe a relação $\eta(C) \varepsilon A$ e, em seguida, a fórmula 87) implica a relação $\eta^*(C^*) \varepsilon A$. Como os conjuntos C^* são precisamente os conjuntos mensuráveis tirados de $(W,C(M))^*$, fica provada a mensurabilidade de ξ^* com respeito ao espaço mensurável marginal de (W,M), tomado em W^*. Arrumada assim a parte geral do nosso teorema, podemos passar para o caso particular do enunciado por escolha arbitrária dum W^* que se reduza a um só factor, c. q. d.

Exemplo 79. Para que a função $w = \xi(\omega)$ seja mensurável com respeito a (W,M), o teorema 52 impõe a *condição necessária que cada uma das coordenadas de* ξ *seja mensurável com respeito ao correspondente espaço mensurável marginal de* (W,M). Que *esta condição não é suficiente,* mostra-o o caso em que $\Omega = \{1,2\}$, $W_1 = \{1,2\}$, $W_2 = \{1,2\}$, $W = W_1 \times W_2$, $A = \{\Omega, O_\Omega\}$, $M = \{W, O_W, \{(1,1)\}, \{(1,1)\}^-\}$, $\xi(1) = (1,1)$, $\xi(2) = (2,2)$, $W^* = W_1$ e $W^{**} = W_2$, isto se recorrermos a $\eta(\{(1,1)\}) = \{1\} \varepsilon A^-$, $C^*(M) = \{W_1, O_{W_1}\}$, $C^{**}(M) = \{W_2, O_{W_2}\}$ e ao exemplo 71 na parte que envolve a mensurabilidade da função marginal ξ^* [ou ξ^{**}] com respeito a $(W^*, C^*(M))$ [ou $(W^{**}, C^{**}(M))$], devendo atender-se à minimalidade da álgebra-σ $C^*(M)$ [ou $C^{**}(M)$] em relação a W^* [ou W^{**}].

Exemplo 80. Supondo que a função $w = \xi(\omega)$ é uma função elementar [ou simples], definida em Ω e com contradomínio $E \lessdot W$, a sua marginal tomada em W^* emparceira cada ponto $\xi(\omega)$ do conjunto intransnumerável [ou finito] E com um ponto $\xi^*(\omega)$ do respectivo contradomínio E^*, donde concluímos que a função marginal é também elementar [ou simples]. — Em particular, se ξ for uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a (W,M), então ξ^* será uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a $(W^*, C^*(M))$ (veja-se a introdução ao n.º **5** do § 22). — Talvez valha a pena referir que a função marginal pode ser elementar [ou simples] sem que o seja a função marginada. Examine-se, a propósito, o caso em que Ω é uma recta real, $W_1 = \{1,2\}$, o espaço W_2 é outra recta real, $W = W_1 \times W_2$, o espaço marginal $W^* = W_1$ e, por fim, a função ξ faz corresponder a cada $\omega \varepsilon \Omega$ o ponto $(1,\omega^2)$ pertencente a W.

Exercício 80. Recordando a fórmula 87) e o teorema 52, mostre que a marginal $\xi^*(\omega)$ da função mensurável $\xi(\omega)$ tem uma representação canónica, a qual resulta mensurável se for mensurável em relação a $(W,\mathcal{M})$ todo o cilindro com base elementar contida em W^*.

5. **Funções marginais supostas mensuráveis**

Vejamos agora como a mensurabilidade de funções marginais se reflecte na função marginada. Neste contexto, temos o

Teorema 53. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(\mathbf{A})]$, suponha-se que o espaço W(w) é o produto de dois ou mais espaços-factores $W_t(w_t)$ $(t \varepsilon T)$, escolham-se arbitrariamente dois espaços $W^*(w^*)$ e $W^{**}(w^{**})$ que sejam marginais de W um em relação ao outro e, por fim, admita-se que $w = \xi(\omega)$ é uma função definida em Ω. Então, se a função marginal $w^* = \xi^*(\omega)$ for mensurável com respeito a um espaço mensurável $[W^*(w^*),\mathcal{M}^*(M^*)]$, a função marginada ξ resulta mensurável com respeito ao espaço mensurável $(W,\mathcal{M}(\mathcal{M}^*))$, onde $\mathcal{M}(\mathcal{M}^*)$ é a álgebra-σ igual à classe dos cilindros com base $M^* \varepsilon \mathcal{M}^*$. Em aditamento, se cada coordenada $w_t = \xi_t(\omega)$ da função ξ for mensurável com respeito a um espaço mensurável $[W_t(w_t),\mathcal{M}_t(M_t)]$ de igual índice, então a função marginada ξ resulta mensurável com respeito ao espaço mensurável $(W,\widetilde{\mathcal{M}})$, onde $\widetilde{\mathcal{M}}$ é a álgebra-σ gerada pela classe formada por todos os cilindros que tenham base $M_t \varepsilon \mathcal{M}_t$ para algum $t \varepsilon T$.»

Demonstração. Atribuindo a η e a η^* os significados que vêm da fórmula 87), passemos para a primeira parte da tese. Seja $C(M^*)$ o cilindro genérico contido em W e com base $M^* \varepsilon \mathcal{M}^*$, como quem diz o elemento genérico da classe $\mathcal{M}(\mathcal{M}^*)$. Então, a hipótese de $\mathcal{M}^*$ ser uma álgebra-σ e o teorema 28 fazem com que $\mathcal{M}(\mathcal{M}^*)$ seja uma álgebra-σ e logo $(W,\mathcal{M}(\mathcal{M}^*))$ seja um espaço mensurável.

Por outro lado, não só sabemos do n.º **3** que a função ξ^* tem o domínio Ω, como também a hipótese de mensurabilidade estabelecida a propósito de ξ^*, juntamente com a fórmula 87), prova a relação $\eta(C(M^*)) \varepsilon A$ para qualquer $C(M^*) \varepsilon \mathcal{M}(M^*)$, quer dizer prova a mensurabilidade de ξ com respeito a $(W, \mathcal{M}(M^*))$.

Passando agora para a parte adicional da tese, vamos designar, seja qual for $t \varepsilon T$, por η_t a função inversa de ξ_t e, seja qual for $M_t \varepsilon \mathcal{M}_t$, por $C(M_t)$ o cilindro de W com base M_t. Então, a hipótese de mensurabilidade admitida para as coordenadas ξ_t e mais uma vez a fórmula 87) provam a relação

$$\eta_t(M_t) = \eta(C(M_t)) \varepsilon A \text{ para todo o } t \varepsilon T \text{ e todo o } M_t \varepsilon \mathcal{M}_t,$$

a qual, juntamente com o teorema 46, permite terminar a nossa demonstração.

Posto isso: tomemos para ponto de partida os espaços mensuráveis do teorema 52, onde $W(w) = \underset{t \varepsilon T}{\times} W_t(w_t)$; suponhamos que a função $w = \xi(\omega)$ tem o domínio Ω; admitamos que, seja qual for $t \varepsilon T$, a coordenada $w_t = \xi_t(\omega)$ é mensurável com respeito ao espaço mensurável marginal $(W_t, C_t(\mathcal{M}))$, com $C_t(\mathcal{M})$ igual à álgebra-σ que se obtém, marginando a classe formada pelos cilindros pertencentes a $\mathcal{M}$ cuja base esteja em W_t. Se aplicarmos em seguida o teorema 53, escolhendo para cada $t \varepsilon T$ a álgebra-σ $\mathcal{M}_t = C_t(\mathcal{M})$, então a função ξ resulta mensurável com respeito a $(W, \tilde{\mathcal{M}})$, com $\tilde{\mathcal{M}}$ igual à álgebra-σ gerada por todos os cilindros pertencentes a $\mathcal{M}$ que tenham base nalgum W_t, donde, atendendo às fórmulas 56c) e b), a relação $\tilde{\mathcal{M}} \leqslant \mathcal{M}$. Nesta conformidade, a hipótese de falhar a mensurabilidade da função marginada ξ com respeito a $(W, \mathcal{M})$ faz com que o teorema 53 impossibilite a relação $\tilde{\mathcal{M}} \geqslant \mathcal{M}$. Aliás, o exemplo 79 mostra que há casos em que a dita mensurabilidade falha efectivamente.

Observação. Transcrevamos $\underset{t}{\times} \Omega_t$, A e A'' do teorema 38 e da fórmula 63') respectivamente para $\underset{t}{\times} W_t, \mathcal{M}$ e $\tilde{\mathcal{M}}$ do texto precedente. Então, a relação $\tilde{\mathcal{M}} \leqslant \mathcal{M}$ desse texto passa a ser a transcrição da relação $A'' \leqslant A$ da fórmula 63').

O nosso estudo aponta para uma certa assimetria entre funções marginadas e as suas coordenadas em questões de mensurabilidade. Todavia, o caso particular mais importante permite harmonizar as coisas agradavelmente. Ei-lo:

Teorema 54. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$, suponha-se que o espaço mensurável $[W(w),\mathcal{M}(M)]$ é o produto (transposto) dos espaços mensuráveis $[W_t(w_t),\mathcal{M}_t(M_t)]$ $(t\varepsilon T)$, em número superior a 1 e com uma família T *intransnumerável*. Então, escolhida arbitrariamente uma função $w = \xi(\omega)$ definida em Ω, ela será mensurável com respeito a $(W,\mathcal{M})$ se e só se, seja qual for $t\varepsilon T$, a coordenada $w_t = \xi_t(\omega)$ for mensurável com respeito a $(W_t,\mathcal{M}_t)$.»

Demonstração. Supondo mensurável a função ξ, sabemos, pelo teorema 52, que, seja qual for $t\varepsilon T$, a coordenada ξ_t resulta mensurável com respeito ao espaço mensurável marginal de $(W,\mathcal{M})$ tomado em W_t, marginal esse que os corolários 37' e 33' fazem coincidir com $(W_t,\mathcal{M}_t)$.

Provada assim a necessidade da condição do nosso enunciado, vamos admitir a mensurabilidade de cada ξ_t com respeito ao correspondente $(W_t,\mathcal{M}_t)$. Então, o teorema 53 torna ξ mensurável com respeito a $(W,\tilde{\mathcal{M}})$, pelo que só falta provar a relação $\mathcal{M} \leqslant \tilde{\mathcal{M}}$. Ora, como supomos $\mathcal{M} = \dot{\times}_t \mathcal{M}_t$ em conformidade com a fórmula 60): cada $\mathcal{M}_t$ será igual à correspondente base $C_t(\mathcal{M})$; ocorre a situação descrita na observação que antecede o teorema 54; podemos conservar as transcrições referidas nessa observação e podemos acrescentar a nova transcrição de $\mathcal{A}'$ para $\mathcal{M}$ (veja-se o texto a seguir à fórmula 63')). Nesta conformidade, obtemos $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$, desde que recorramos à hipótese de intransnumerabilidade de T e à fórmula 63") do teorema 40, c. q. d.

Exemplo 81. Demonstrou-se o teorema 54, particularizando a álgebra-σ geral $\mathcal{M}$ para um produto de álgebras-σ $\mathcal{M}_t(t\varepsilon T)$, com a família T intransnumerável. Pode fazer-se uma demonstração mais directa do dito teorema, ganhando em simplicidade do processo e perdendo em perspectiva proveniente da inserção no caso geral.

Com efeito, recordando as convenções introduzidas a propósito dos teoremas 52 e 54, podemos retomar a demonstração da primeira parte do teorema 54, sob a forma de demonstração (simplificada) do teorema 52 quando $W^* = W_t$ para um t arbitrário tirado de $\{1,2,3, \dots\}$, e podemos justificar a outra parte do teorema 54 invocando que a fórmula 44), o exemplo 68 e a fórmula 87) conduzem à igualdade

$$\eta(\underset{t}{\times} M_t) = \eta(\underset{t}{\wedge} C(M_t)) = \underset{t}{\wedge} \eta(C(M_t)) = \underset{t}{\wedge} \eta_t(M_t),$$

válida para qualquer escolha dos conjuntos $M_t \varepsilon \mathcal{M}_t (t \varepsilon T)$, onde a hipótese da mensurabilidade de cada coordenada ξ_t com respeito a $(W_t, \mathcal{M}_t)$ e a relação 54b) fazem com que $\underset{t}{\wedge} \eta_t(M_t) \varepsilon \mathcal{A}$ e logo $\eta(\underset{t}{\times} M_t) \varepsilon \mathcal{A}$, pelo que a definição de $\mathcal{M}$ como álgebra-σ gerada pelos produtos $\underset{t}{\times} M_t$ admissíveis prova, via teorema 46, que a função ξ é mensurável com respeito a $(W, \mathcal{M})$.

Exercício 81. Retome o exemplo 79, ponha $C_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_t$ para cada t e forme a álgebra-σ $\tilde{\mathcal{M}}$ propriamente contida em $\mathcal{M}$ (do teorema 53) que torna a respectiva função ξ mensurável com respeito a $(W, \tilde{\mathcal{M}})$.

6. Composições com ponto de partida num número finito de funções e. m. ou s. m.

Por fim, um estudo breve que nos será útil no próximo parágrafo e que está relacionado com as considerações feitas nos n.os **3** e **5** do § 22 e no n.º **5** do § 23.

Teorema 55. «Dados os espaços mensuráveis $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e $[W'(w'), \mathcal{M}'(M')]$, tome-se o espaço $W(w)$ igual ao produto dos espaços $W_n(w_n)$ $(n=1,2, \dots, N)$, com $1 < N < +\infty$, e suponha-se não só que a função $w = \xi(\omega)$ tem o domínio Ω e o contradomínio $E \leqslant W$, como também que cada uma das coordenadas $w_n = \xi_n(\omega)$ é uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a um espaço mensurável (W_n, M_n) de igual índice. Proposta uma função $w' = \xi'(w)$ definida em W, referida ao espaço mensurável $(W, \tilde{M})$ do teorema 53 e com restrição $\xi'_{W/E}$ ao subespaço W/E, então a hipótese da mensurabilidade de $\xi'_{W/E}$, quando se parte de $(W, \tilde{M})/E$ e com respeito a (W', M'), implica que a composição de $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ com ξ', ou seja com $\xi'_{W/E}$, resulte uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a (W', M'). Em estilo mais abreviado e menos preciso: Dadas funções e. m. [ou s. m.] ξ_n, definidas no mesmo espaço mensurável e em número finito e superior a 1, então será uma função e. m. [ou s. m.] qualquer composição dos ξ_n com outra função que tenha uma restrição mensurável ao subespaço determinado pelo contradomínio da função cujas coordenadas coincidem com os ξ_n.»

Demonstração. Para o efeito da definição de função e. m. [ou s. m.], veja-se o princípio do n.º **5** do § 22. Posto isso, cada coordenada $w_n = \xi_n(\omega)$ tem, por hipótese, um repertório de determinações intransnumerável [ou finito] ; logo o contradomínio E resulta por sua vez intransnumerável [ou finito], donde concluímos que a restrição $\xi'_{W/E}$ e a composição $\xi'_{W/E}(\xi)$ ficam com um contradomínio comum que não pode deixar de ser intransnumerável [ou finito], como quem diz são ambas funções elementares [ou simples]. Por outro lado, sabemos, pelo teorema 53, que ξ é uma função mensurável com respeito a $(W, \tilde{M})$, donde, atendendo ao teorema 47 devidamente transcrito, a mensurabilidade da composição $\xi'(\xi)$ com respeito a (W', M'). Associando agora as duas conclusões aqui alcançadas, reconhecemos que $\xi'(\xi)$ é uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a (W', M'), c. q. d.

O teorema 55 admite dois casos particulares importantes, a saber:

Corolário 55'. «Aceites os dados do teorema 55, a composição $\xi'(\xi)$ ou, mais explicitamente, $\xi'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ será uma função e. m. [ou s. m.] com respeito a (W', M') sempre que a função ξ' for mensurável, quando se parte de $(W, \tilde{M})$ e com respeito a (W', M'), e também sempre que pertencer à restrição $\tilde{M}/E$ qualquer conjunto elementar tirado do subespaço W/E.»

Demonstração. Quanto ao primeiro caso referido, trata-se duma consequência imediata do corolário 47'.

Quanto ao outro caso, não só sabemos do n.º **1** do § 15 que $(W/E, \widetilde{M}/E)$ é um espaço mensurável, como também vimos, no decurso da demonstração do teorema 55, que o subespaço W/E é intransnumerável [ou finito]. Logo a hipótese estabelecida na parte final do nosso corolário, a fórmula 8") e a propriedade 54b) implicam a mensurabilidade de *todos* os conjuntos contidos em W/E, pelo que o exemplo 71, devidamente transcrito, implica a mensurabilidade de $\xi'_{W/E}$, quando se parte de $(W,\widetilde{M})/E$ e com respeito a (W',M'). Nesta conformidade, o teorema 55 permite terminar a nossa demonstração.†

Exemplo 82. Caso a igualdade entre espaços $W = \underset{1 \leqslant n \leqslant N}{\times} W_n$, admitida nos enunciados do teorema 55 e do corolário 55', se estenda à igualdade entre espaços mensuráveis $(W,M) = \underset{1 \leqslant n \leqslant N}{\dot{\times}} (W_n,M_n)$, obtida por transcrição adequada da fórmula 60), então sabemos, pela parte final da demonstração do teorema 54, que se verifica a igualdade entre álgebras-σ $\widetilde{M} = M$, facto esse que predetermina $\widetilde{M}$ e que nos coloca na situação habitual para efeitos de composição das funções ξ e ξ' em questões de mensurabilidade (com o dado prévio de três espaços mensuráveis).

Exercício 82. A composição $\xi'(\xi)$ do teorema 55 pode ser uma função simples mesmo que nenhuma das coordenadas ξ_n seja uma função simples? Haverá algum inconveniente em procurar estender a teoria precedente ao caso em que a função ξ tiver infinitas coordenadas?

---

† A leitura do exemplo 71 permite ir mais longe e afirmar que *a mensurabilidade da composição não é influenciada pela escolha da álgebra-σ M', tirada de* W'.

§ 24 — FUNÇÕES MENSURÁVEIS COM RESPEITO A ESPAÇOS DE BOREL

1. Enquadramento da questão

O estudo feito nos parágrafos precedentes é muito geral e constitui um verdadeiro incentivo para ser aproveitado por vias variadas. Contudo, dado o objectivo que nos propomos atingir, vamos conservar apenas a arbitrariedade do espaço mensurável de partida $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$ e *vamos limitar o espaço mensurável de chegada a um espaço de Borel* $[X(x),\mathcal{B}(B)]$, igual ao produto das rectas de Borel $[X_t(x_t),\mathcal{B}_t(B_t)]$, *ou a um tal espaço alargado* $[\overline{X}(x),\overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$, igual ao produto das rectas de Borel alargadas $[\overline{X}_t(x_t),\overline{\mathcal{B}}_t(\overline{B}_t)]$.

Neste contexto, uma função de ligação entre $(\Omega,\mathcal{A})$ e $(X,\mathcal{B})$ [ou $(\overline{X},\overline{\mathcal{B}})$] será da forma $x = \xi(\omega)$ ou, equivalentemente, $\{x\} = = \xi(\{\omega\})$ e terá um domínio $D \leqslant \Omega$ o qual, caso valha D propriamente contido em Ω, será estendido a Ω por escolha duma determinação fixa $x_0 \varepsilon X$ [ou $x_0 \varepsilon \overline{X}$], segundo um critério considerado oportuno, e pela convenção subsequente $x_0 = \xi(\omega)$ para todos os $\omega \varepsilon D^-$. Quanto à *função inversa* $L = \eta(M)$, ela continua a ser dada pela fórmula 70), com as particularidades $M \leqslant X$ [ou $M \leqslant \overline{X}$] e $\Omega = \eta(E) = \eta(X)$ [ou $\eta(\overline{X})$], sendo E o contradomínio da função ξ definida em Ω.

É óbvio que as considerações desenvolvidas nos parágrafos precedentes continuam a ser válidas debaixo da particularização por nós introduzida. Por vezes, surgem alternativas de dedução simplificada, em que a economia de meios se confronta com o obscurecimento de perspectivas. Seja como for, *os espaços de Borel proporcionam peculiaridades dignas de registo de que passamos a citar as mais importantes.*

α) É boreliano [eventualmente alargado] qualquer conjunto singular contido em X [ou $\overline{X}$].

Foi o que vimos no teorema 19 e no teorema 41 [ou na propriedade homóloga do n.º **3** do § 20].

β) Todo o espaço de Borel [eventualmente alargado] é um produto de rectas de Borel [eventualmente alargadas], produto esse susceptível de se reduzir a um só factor.

Foi o que vimos através da fórmula de definição 64) [ou 64')].

β') No caso da dimensionalidade finita, conhecemos várias classes geradoras da álgebra de Borel incidente que são mais cómodas do que a classe formada pelos produtos de borelianos lineares.

Foi o que vimos nos n.^{os} **3** e **4** do § 14 e nos n.^{os} **2** e **4** do § 20.

γ) No que concerne à determinação x_0 de ξ sobre $D^- \neq O_\Omega$, por razões pragmáticas é uso escolhê-la igual à *origem*, quer dizer ao ponto cujas coordenadas são todas iguais a 0.

Notemos que a escolha apontada se revela muito propícia para diversos efeitos ulteriores, nomeadamente para o tratamento de integrais.

γ') Caso usemos a fórmula 75) com uma adição intransnumerável e com respeito a uma recta de Borel [eventualmente alargada], as igualdades convencionais $\{x\} \cdot 1 = \{x\}$ e $\{x\} \cdot 0 = O_X$ [ou $O_{\overline{X}}$] podem ser substituídas vantajosamente pelas igualdades numéricas $x \cdot 1 = x$ e $x \cdot 0 = 0$ (esta suposta válida mesmo que se tenha $x = \pm \infty$).

Caso seja transnumerável a adição da fórmula 75), a substituição citada não colhe, porque não sabemos lidar com adições numéricas transnumeráveis.

δ) Não são de desprezar as facilidades de passagem ao limite (e as suas consequências em termos de continuidade, de derivadas, de integrais, etc.) proporcionadas pelas métricas correntes em espaços de Borel [eventualmente alargados], com destaque para a métrica euclideana dos espaços a um número finito de dimensões.

Neste contexto, merece atenção especial a possibilidade de permuta entre a passagem ao limite e alguma operação ou propriedade.

δ') As facilidades supracitadas tornam-se particularmente relevantes no caso específico da recta de Borel [eventualmente alargada].

Neste contexto, a substituição referida em γ') torna-se muito útil.

2. Inserção no caso geral

Com os dados do n.º **1**, a representação canónica da fórmula 75) toma o aspecto genérico

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_{x \in E}} [\{x\} \cdot I_{\eta(\{x\})}(\omega)]. \tag{88}$$

Caso a função ξ seja elementar (talvez simples), tem-se $E =$ $= \{_0x, _1x, \ldots, _hx, \ldots\}$, onde os $_hx \varepsilon X$ [ou $\overline{X}$] são pontos e não devem confundir-se com eventuais coordenadas x_h dum ponto x. Nesta conformidade, a fórmula 88) admite a simplificação estrutural

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_{h}} [\{_hx\} \cdot I_{\eta(\{_hx\})}(\omega)], \text{ com } 0 \leqslant h < H \text{ e com } H \leqslant +\infty. \tag{88'}$$

Caso E seja intransnumerável e caso o espaço de chegada seja uma recta de Borel [eventualmente alargada], o exposto em γ') do n.º **1** permite a representação canónica melhorada

$$\xi(\omega) = \sum_{h} [_hx \cdot I_{\eta(\{_hx\})}(\omega)], \text{ com } 0 \leqslant h < H \text{ e com } H \leqslant +\infty. \tag{88''}$$

Como é óbvio, não só há possibilidade de ξ admitir representações compatíveis diferentes da canónica, como também há sempre representações compatíveis e paralelas quando se trabalha simultaneamente com duas funções de ligação. Tudo isso nos termos do § 21, *sob a reserva* de serem evitadas confusões notacionais entre, por um lado, índices (t, s ou outros) individualizadores quer de pontos pertencentes a X [ou $\overline{\text{X}}$] quer de conjuntos contidos em Ω e, por outro lado, índices (t, n ou outros) individualizadores quer de coordenadas de x quer de espaços-factores de X [ou $\overline{\text{X}}$] quer de álgebras-σ factores de B [ou $\overline{B}$].

Chegados a este ponto, *ainda não recorremos ao conceito de mensurabilidade* nem de conjuntos nem de funções.

Nos termos do n.º **2** do § 22 e de γ) do n.º **1** do § 24, a função (directa) $x = \xi(\omega)$, ou definida em Ω ou definida em DεA e ampliada para $D^- \neq O_\Omega$ mediante a convenção preferencial de assumir aí a determinação constante igual à origem, dizíamos ξ é denominada **função mensurável** (por vezes *função medível*) *com respeito ao espaço de Borel* (X,B) [ou ($\overline{\text{X}}$,$\overline{B}$)] se e só se, seja qual for o conjunto BεB [ou $\overline{\text{B}}\varepsilon\overline{B}$], tiver lugar a relação $\eta(\text{B})\varepsilon A$ [ou $\eta(\overline{\text{B}})\varepsilon A$]. Caso se tenha Ω contém propriamente DεA, o teorema 45 refere que *é indiferente considerar mensurável ξ sobre* **D** *ou a extensão preferencial de ξ sobre Ω*. Além disso, *uma constante é sempre mensurável* e *a mensurabilidade duma função é insensível à substituição duma determinação constante por outra*, ambas pertencentes a X [ou $\overline{\text{X}}$], *desde que a substituição se efectue sobre um conjunto não-vazio e mensurável* em relação a (Ω,A).

Se quisermos aplicar o teorema 46 ao caso (W,M) = (X,B) [ou ($\overline{\text{X}}$,$\overline{B}$)], dispomos sempre da *classe geradora* formada pelos produtos de borelianos lineares contidos em X [ou $\overline{\text{X}}$] e, se for finita a dimensionalidade de X [ou $\overline{\text{X}}$], dispomos também das facilidades adicionais referidas em β') do n.º **1**.

Se quisermos aplicar o estudo das *composições mensuráveis* — consubstanciado no teorema 47 e nalgumas das considerações envolventes — ao caso (W,M) = (X,B) [ou ($\overline{\text{X}}$,$\overline{B}$)], então a particularização mais importante é a de o terceiro espaço mensurável (W',M') ser outro espaço de Borel (X',B') [ou ($\overline{\text{X}}$',$\overline{B}$')].

Se quisermos aplicar a propriedade da observação subsequente ao corolário 47', com transcrição adequada à situação presente, então uma função, definida em Ω e mensurável com respeito ao espaço de Borel dado, não perde essa mensurabilidade se escolhermos arbitrariamente um $K \leqslant \Omega$ e não-vazio e se restringirmos a função considerada referindo-a à restrição $(\Omega,A)/K$.

Se quisermos aplicar o teorema 48 ao caso $(W,M) = (X,B)$ [ou $(\overline{X},\overline{B})$], então a particularização mais importante é a que corresponde a um espaço mensurável de saída (Ω,A) coincidente com um espaço de Borel [eventualmente alargado], a qual conduz à mensurabilidade da restrição duma função mensurável sempre que o conjunto de truncagem for um boreliano de A.

Posto isso, vamos adaptar os teoremas 49 e 50 ao caso $(W,M) = (X,B)$ [ou $(\overline{X},\overline{B})$]. Obtemos o

Teorema 56. «Propostos o espaço mensurável $[\Omega(\omega),A(\mathrm{A})]$ e o espaço de Borel $[X(x),B(\mathrm{B})]$ ou $[\overline{X}(x),\overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$ e proposta a função $x = \xi(\omega)$ definida em Ω, seja E o contradomínio de ξ e seja η a função inversa de ξ na acepção da fórmula 70). Então, não só a hipótese de ξ ser uma função mensurável [ou e. m. ou s. m.] com respeito a (X,B) [ou $(\overline{X},\overline{B})$] faz com que a representação canónica da fórmula 88) fique mensurável [ou mensurável e intransnumerável ou mensurável e finita] em relação a (Ω,A), como também a hipótese de ξ ser uma função elementar com contradomínio $\{{}_0x, {}_1x, \ldots, {}_hx, \ldots\}$ institui ξ em função e. m. com respeito a (X,B) [ou $(\overline{X},\overline{B})$] se e só se, escolhido arbitrariamente um e só um valor h' de h, tiver lugar a relação

$$\eta(\{{}_hx\})\varepsilon A \text{ para qualquer } h \neq h', \tag{89}$$

equivalente a

$$\eta(\{{}_hx\})\varepsilon A \text{ para qualquer } h \text{ admissível.} \tag{90}$$

Em aditamento, se a função ξ degenerar em constante, ela será sempre mensurável com respeito a (X,B) [ou $(\overline{X},\overline{B})$] e, se a função ξ for uma indicatriz, ela será mensurável com respeito a (X,B) [ou $(\overline{X},\overline{B})$] quando e só quando ela coincidir com a indicatriz dum conjunto mensurável em relação a (Ω,A).»

Demonstração. Recordando α) do n.º **1**, reconhecemos que a hipótese do teorema 50, a saber $\{w\}\varepsilon M$ para qualquer $w\varepsilon E$, se encontra realizada sob a forma $\{x\}\varepsilon B$ [ou $\overline{B}$] para todo o $x\varepsilon E$, pelo que os conjuntos $\eta(\{x\})$ da fórmula 88) se tornam mensuráveis em relação a (Ω, A), debaixo da hipótese de mensurabilidade para ξ; logo resultam os tipos de mensurabilidade da representação canónica de ξ que foram referidos na tese.

Por outro lado, os conjuntos E_k do teorema 49 passam a ser os conjuntos elementares $\{_h x\}$ das fórmulas 89) e 90), fórmulas essas com equivalência herdada do estudo genérico feito no n.º **5** do § 22, pelo que podemos limitar-nos a considerar a relação 90), à qual o dito estudo genérico confere a categoria de condição necessária e suficiente para que a função elementar ξ seja uma função e. m. com respeito a (X, B) [ou $(\overline{X}, \overline{B})$]. Arrumada assim a primeira parte do nosso teorema, vamos passar para o aditamento.

Ora, se ξ degenerar em constante, a sua mensurabilidade já é conhecida através do teorema 45. Por outro lado, se ξ for uma indicatriz sem ser constante, então o seu contradomínio $E = \{0,1\}$ é sempre um boreliano, haverá um conjunto não-vazio K propriamente contido em Ω de que ξ é a indicatriz e, além disso, a condição de mensurabilidade 89) poderá assumir a forma $\eta(\{1\}) = = K\varepsilon A$, c. q. d.

Posto isso, recordemos o teorema 56 e suponhamos que cada uma das funções $\xi(\omega)$ e $\tilde{\xi}(\omega)$ se encontra definida em Ω e é também uma função mensurável [ou e. m. ou s. m.] com respeito a (X, B) [ou $(\overline{X}, \overline{B})$], pelo que a representação canónica da fórmula 88) e a sua homóloga

$$\tilde{\xi}(\{\omega\}) = \dot{\sum_{\tilde{x}\varepsilon\tilde{E}}} [\{\tilde{x}\} \cdot I_{\tilde{\eta}(\{\tilde{x}\})}(\omega)]$$

serão ambas mensuráveis [ou mensuráveis e intransnumeráveis ou mensuráveis e finitas] *em relação a* (Ω, A). Então, a transcrição adequada da fórmula 77), feita sob a reserva relativa a índices que foi expressa a seguir à fórmula 88"), *conduz a representações compatíveis e paralelas para as duas funções* ξ e $\tilde{\xi}$, a saber

$$\xi(\{\omega\}) = \dot{\sum_{\eta(\{x\})\Lambda\tilde{\eta}(\{\tilde{x}\})\neq o_{\Omega}}} [\{x\} \cdot I_{\eta(\{x\})\Lambda\tilde{\eta}(\{\tilde{x}\})}(\omega)] \tag{91}$$

e

$$\tilde{\xi}(\{\omega\}) = \dot{\sum_{\eta(\{x\})\Lambda\tilde{\eta}(\{\tilde{x}\})\neq o_{\Omega}}} [\{\tilde{x}\} \cdot I_{\eta(\{x\})\Lambda\tilde{\eta}(\{\tilde{x}\})}(\omega)],$$

onde a propriedade 54b) garante que ambas as representações venham a ser *mensuráveis* [ou *mensuráveis e intransnumeráveis* ou *mensuráveis e finitas*] *em relação a* (Ω,A).

3. Sucessões borelianas, vectores borelianos e funções borelianas

Contando mais uma vez com os dados do n.º **1**, pouco há a acrescentar ao exposto no n.º **2** do § 23, onde o teorema 51 e o exemplo 78 referem as propriedades mais importantes do *corte* $\xi(\omega)/\bar{\omega}^*$ quando a função cortada $\xi(\omega)$ com domínio Ω passar a ser mensurável com respeito a (X,B) [ou $(\bar{X},\bar{B})$]. Recomenda-se apenas o cuidado a haver com os índices, mais ou menos nos moldes assinalados a seguir à fórmula 88"), e considera-se digno de registo que o corte $\xi/\bar{\omega}^*$ admite representações mensuráveis em relação a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$ *por duas razões convergentes:* por um lado, o teorema 51 garante que a função $\xi/\bar{\omega}^*$, referida a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$, é mensurável com respeito a (X,B) [ou $(\bar{X},\bar{B})$], pelo que o teorema 56 garante uma representação canónica e mensurável de $\xi/\bar{\omega}^*$ em relação a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$; por outro lado, o teorema 56 garante que a função cortada ξ, referida a (Ω,A), tem uma representação canónica e mensurável em relação a (Ω,A), pelo que um dos resultados do exemplo 78 faz corresponder uma representação mensurável de $\xi/\bar{\omega}^*$ em relação a $(\Omega,A)/\bar{\omega}^*$.

Posto isso, vamos introduzir algumas *designações* que talvez não sejam inteiramente coerentes em face doutras já convencionadas, mas que são um tanto cómodas e mesmo usuais.

Nesta conformidade, uma função $x = \xi(\omega)$, definida em Ω e mensurável com respeito a (X,B) [eventualmente $(\overline{X},\overline{B})$], denomina-se: *sucessão boreliana* [eventualmente em sentido lato] se e só se o espaço de Borel incidente for o produto duma infinidade numerável de rectas de Borel; *vector boreliano* [eventualmente em sentido lato] se e só se o espaço de Borel incidente for o produto dum número finito de rectas de Borel; *função boreliana* [eventualmente em sentido lato] se e só se o espaço de Borel incidente se reduzir a uma recta de Borel. † Escusado será dizer: uma função boreliana será apenas um caso particular ou degenerado dum vector boreliano e *um vector boreliano tem a mesma dimensionalidade* que o respectivo espaço de Borel.

Por outro lado, se dispensarmos $\xi(\omega)$ da obrigação de ser mensurável, então fica ou uma *sucessão real* ou um *vector real* ou uma *função real*, em cada um dos casos de domínio Ω, de carácter não necessariamente boreliano e eventualmente em sentido lato.

Em aditamento, vamos designar por *sucessão e. b.* [ou *s. b.*] toda a sucessão boreliana que seja elementar [ou simples], por *vector e. b.* [ou *s. b.*] todo o vector boreliano que seja elementar [ou simples] e ainda por *função e. b.* [ou *s. b.*] toda a função boreliana que seja elementar [ou simples].

Em face das convenções supracitadas, os resultados dos n.os **4** e **5** do § 23 adaptam-se ao caso $(W,M) = (X,B) = \dot{\times}_{t \in T} (X_t,B_t)$ da fórmula 64) [ou $= (\overline{X},\overline{B}) = \dot{\times}_{t \in T} (\overline{X}_t,\overline{B}_t)$ da fórmula 64')] da maneira que se vai referir através do

Teorema 57. «Dados o espaço mensurável $[\Omega(\omega),A(\mathrm{A})]$ e o espaço de Borel multidimensional $[X(x),B(\mathrm{B})] = \dot{\times}_{t \in T} [X_t(x_t),B_t(\mathrm{B}_t)]$ ou $[\overline{X}(x),\overline{B}(\overline{\mathrm{B}})] = \dot{\times}_{t \in T} [\overline{X}_t(x_t),\overline{B}_t(\overline{\mathrm{B}}_t)]$, admita-se que $(x_t, t \in T) = x = \xi(\omega)$ é uma função definida em Ω e mensurável com respeito a (X,B) ou $(\overline{X},\overline{B})$ e, portanto, é um vector boreliano [ou uma sucessão boreliana] se e só se a família T for

† Há outras definições de função boreliana, etc., que diferem das dadas no texto.

finita [ou infinita numerável]. Então, escolhido arbitrariamente um espaço de Borel marginal $(X^*,\mathcal{B}^*) = \dot{\times}_{t^*\varepsilon T^*} (X_{t^*},\mathcal{B}_{t^*})$ ou $(\overline{X}^*,\overline{\mathcal{B}}^*) = \dot{\times}_{t^*\varepsilon T^*} (\overline{X}_{t^*},\overline{\mathcal{B}}_{t^*})$, a correspondente função marginal $(x_{t^*},t^*\varepsilon T^*) = x^* = \xi^*(\omega)$ resulta uma função definida em Ω e mensurável com respeito a $(X^*,\mathcal{B}^*)$ ou $(\overline{X}^*,\overline{\mathcal{B}}^*)$ e, portanto, resulta uma função boreliana [ou um vector boreliano ou uma sucessão boreliana] se e só se a subfamília T^* for elementar [ou finita ou infinita numerável].

Em particular, para que se verifique a mensurabilidade concernente à função marginada, suposta definida em Ω, é condição necessária que todas as coordenadas $x_t = \xi_t(\omega)$ de $\xi(\omega)$ sejam funções borelianas, cada uma com respeito à recta de Borel marginal que lhe corresponde. Caso a família T seja finita, a condição referida resulta também suficiente para que $\xi(\omega)$ seja um vector boreliano e, caso a família T seja infinita numerável, a mesma condição resulta suficiente para que $\xi(\omega)$ seja uma sucessão boreliana.»

Demonstração. Quer se opte pela versão geral quer se opte pela versão particular da condição necessária do enunciado, trata-se duma aplicação fácil do teorema 52 ao caso $(W,\mathcal{M}) = (X,\mathcal{B})$ ou $(\overline{X},\overline{\mathcal{B}})$, isto com recurso às designações introduzidas no texto que precede o nosso teorema. O mesmo recurso e a condição suficiente do teorema 54, essa quando aplicada ao caso $(W,\mathcal{M}) = (X,\mathcal{B})$ ou $(\overline{X},\overline{\mathcal{B}})$, provam a parte final da nossa tese ou seja a parte relativa à condição suficiente.

Por fim, os resultados do n.º **6** do § 23 particularizam-se através do

Teorema 58. «São dados o espaço mensurável $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(A)]$, o espaço de Borel multidimensional a $N < +\infty$ dimensões $[X(x),\mathcal{B}(B)] = \dot{\times}_{1\leqslant n\leqslant N} [X_n(x_n),\mathcal{B}_n(B_n)]$ ou o seu homólogo alargado, a recta de Borel $[X'(x'),\mathcal{B}'(B')]$ ou a sua homóloga alargada e, por fim, um vector real $x = \xi(\omega)$ com domínio Ω. Supondo que cada uma das coordenadas $x_n = \xi_n(\omega)$ é uma função e. b. [ou s. b.], eventualmente em sentido lato, então, seja qual for a função $x' = \xi'(x_1, x_2, \dots, x_N)$ definida em X [ou $\overline{X}$], a composição $\xi'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ resulta uma função e. b. [ou s. b.], eventualmente em sentido lato. Em estilo mais abreviado e menos preciso: é função e. b. [ou s. b.] qualquer composição de funções e. b. [ou s. b.] em número finito e superior a 1 com outra função cujo contradomínio esteja contido nalguma recta real [eventualmente alargada].»

Demonstração. Comecemos por notar que as mensurabilidades do enunciado dizem respeito a (X_n, B_n) [ou $(\overline{X}_n, \overline{B}_n)$] para cada ξ_n e dizem respeito a (X', B') [ou $(\overline{X}', \overline{B}')$] para a composição. Nesta conformidade, retomemos o teorema 55 e o exemplo 82, com as particularizações $(W', M') = (X', B')$ [ou $(\overline{X}', \overline{B}')$] e $(W, M) = (X, B)$ [ou $(\overline{X}, \overline{B})$], notando que o exemplo 82 permite pôr a igualdade $\widetilde{M} = B$ [ou $\overline{B}$]. Então, sendo E o contradomínio de ξ, a propriedade α) do n.º 1 do § 24 faz com que todo o conjunto elementar contido em X/E [ou $\overline{X}$/E] pertença a B/E [ou $\overline{B}$/E], pelo que a segunda versão do corolário 55' permite dar por terminada a nossa demonstração.

Exemplo 83. *O teorema* 58 *permanece válido se pusermos* $N = 1$. É o que se pode reconhecer, por exemplo, da forma seguinte: por um lado, a intransnumerabilidade [ou finititude] do contradomínio E de ξ_1 ou ξ implica a intransnumerabilidade [ou finititude] do contradomínio da composição $\xi'(\xi)$; por outro lado, o teorema 47 garante a mensurabilidade dessa composição com respeito a (X', B') [ou $(\overline{X}', \overline{B}')$], já que α) do n.º 1 e a propriedade 54b) instituem B/E [ou $\overline{B}$/E] em álgebra-σ máxima tirada de X/E [ou $\overline{X}$/E] e, portanto, o estudo feito no exemplo 71 institui a restrição $\xi'_{X/E}$ [ou $\xi'_{\overline{X}/E}$], referida a (X, B)/E [ou $(\overline{X}, \overline{B})$/E], em função mensurável com respeito a (X', B') [ou $(\overline{X}', \overline{B}')$].

Exemplo 84. O teorema 51, o exemplo 78 e a nomenclatura apresentada neste n.º mostram que a hipótese de ξ, referido a (Ω, A), ser uma função boreliana ou e. b. ou s. b. [eventualmente um vector boreliano ou e. b. ou s. b., talvez até uma sucessão boreliana ou e. b. ou s. b.] implica a propriedade análoga (com conservação da dimensionalidade) para o corte $\xi/\bar{\omega}^*$, referido a $(\Omega, A)/\bar{\omega}^*$, corte esse que se supõe possível devido à factorizabilidade do espaço Ω.

Exercício 83. No princípio deste n.º vimos duas vias para obter uma representação mensurável do corte $\xi/\overline{\omega}^*$ a partir da função ξ, definida em Ω e mensurável com respeito a um espaço de Borel dado. Mostre que essas duas vias conduzem à mesma representação do corte ou, equivalentemente, que a transformação de representações do exemplo 78 faz corresponder à representação canónica de ξ uma representação de $\xi/\overline{\omega}^*$, a qual resulta por sua vez canónica. Esta última propriedade manter-se-á quando se passa dos espaços de Borel para espaços mensuráveis arbitrários?

Exercício 84. Retome o problema da composição de funções mensuráveis e suponha que a primeira componente é uma função e. m. com respeito ao espaço mensurável (W,M), não necessariamente igual a um espaço de Borel. Mostre que uma segunda componente igual a uma função boreliana [ou a um vector boreliano ou a uma sucessão boreliana] obriga a composição a ser uma função e. b. [ou um vector e. b. ou uma sucessão e. b.]. Em seguida, prove que o resultado subsiste caso se substitua e. m. por s. m. e, correspondentemente, e. b. por s. b.

4. **Posição axial das funções borelianas**

No decurso deste parágrafo referimos algumas vantagens das funções mensuráveis com respeito a espaços de Borel [eventualmente alargados], vimos no teorema 57 uma vantagem suplementar proporcionada pelas sucessões borelianas e pelos vectores borelianos e, por fim, acrescentámos no teorema 58 (e no exemplo 83) uma nova vantagem proporcionada pelos vectores com coordenadas todas e. b. (vectores esses borelianos graças ao teorema 57). Os resultados alcançados permitem reduzir vários problemas relativos a funções mensuráveis com respeito a espaços de Borel a outros problemas mais acessíveis, em que entram apenas funções borelianas [eventualmente em sentido lato] e, com acréscimo de acessibilidade, porventura apenas funções e. b. ou s. b. Nos parágrafos seguintes vamos ocupar-nos das funções borelianas, se bem que vá haver, por vezes, um retorno esporádico aos vectores borelianos.

Talvez valha a pena acrescentar que existe um encadeamento entre funções borelianas e as suas homónimas em sentido lato que pouco rastro deixa ficar. Com efeito, se tomarmos a função boreliana ξ com respeito à recta de Borel (X,B) e se redesignarmos a função ξ por $\overline{\xi}$, quando tomada com respeito à correspondente recta de Borel alargada $(\overline{\mathrm{X}},\overline{B})$, então o corolário 21' faz corresponder a cada $\overline{\mathbf{B}}\varepsilon\overline{B}$ um $\mathrm{B}\varepsilon B$ propriamente contido em $\overline{B}$ tal que $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \dotplus \overline{\mathbf{Z}}$, com $\overline{\mathbf{Z}} \leqslant \infty\, \varepsilon\overline{B}$; logo, sendo η e $\overline{\eta}$ as funções inversas respectivamente de ξ e de $\overline{\xi}$, a fórmula 72'), a propriedade óbvia $\overline{\eta}(\overline{\mathbf{Z}}) = O_{\Omega}$ e a hipótese de ξ ser uma função boreliana conduzem a

$$\overline{\eta}(\overline{\mathbf{B}}) = \overline{\eta}(\mathbf{B}) \dotplus \overline{\eta}(\overline{\mathbf{Z}}) = \eta(\mathbf{B})\varepsilon A,$$

donde concluímos que $\overline{\xi}$ é uma função boreliana em sentido lato. Por outro lado, caso tomemos uma função $\overline{\xi}$ que seja boreliana com respeito a $(\overline{\mathrm{X}},\overline{B})$ e que tenha função inversa $\overline{\eta}$, obtemos uma função ξ com respeito a (X,B), com inversa η, desde que mudemos os eventuais valores $\pm\infty$ de $\overline{\xi}$ digamos para o número 0. Essa função será tal que, escolhido arbitrariamente um $\mathrm{B}\varepsilon B$ e tomado em conta que $\overline{\eta}(\infty)\varepsilon A$: ou se tem $0\varepsilon\mathrm{B}^{-}$ e $\eta(\mathrm{B}) = \overline{\eta}(\mathrm{B})\varepsilon A$ ou se tem $0\varepsilon\mathrm{B}$ e $\eta(\mathrm{B}) = \overline{\eta}(\mathrm{B}) \dotplus \overline{\eta}(\infty)\varepsilon A$, pelo que ξ resulta uma função boreliana vulgar.

ESTUDO ESPECÍFICO DAS FUNÇÕES BORELIANAS

§ 25 — FUNÇÕES BORELIANAS (REAIS)

1. Generalidades

Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$, consideremos a recta de Borel $[X(x), B(\mathrm{B})]$ ou a sua alargada $[\overline{X}(x), \overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$ e suponhamos que $x = \xi(\omega)$ é uma *função real* ou uma tal função em sentido lato, definida em Ω e com contradomínio E contido em X ou $\overline{X}$.

Tomando em conta a natureza do espaço que contém E, tornam-se oportunas as seguintes *definições:*

Chama-se *parte positiva* de $x = \xi(\omega)$ e representa-se por $x^+ = = \xi^+(\omega)$ a função real e não-negativa que é igual a x se $x > 0$ e igual a 0 se $x \leqslant 0$ ou, equivalentemente, que é igual a x se $x \geqslant 0$ e igual a 0 se $x < 0$; por outro lado, chama-se *parte negativa* de x e representa-se por $x^- = \xi^-(\omega)$ a função real e não-negativa que é igual à parte positiva de $-x = -\xi(\omega)$ ou seja igual a $(-x)^+ = = (-\xi)^+(\omega)$.

Note-se que x^- é igual a $-x$ se $x < 0$ e igual a 0 se $x \geqslant 0$ ou, equivalentemente, que x^- é igual a $-x$ se $x \leqslant 0$ e igual a 0 se $x > 0$. Fala-se em parte negativa, não devido aos valores assumidos por x^- (que jamais são negativos), mas devido ao facto de agora $-x$ assumir o papel assumido por x na definição de x^+.

Em face das definições supracitadas, reconhece-se imediatamente que uma função não-negativa [ou não-positiva] coincide com a sua parte positiva [ou com a simétrica da sua parte negativa] e que, seja qual for o ponto ω, valem as fórmulas

$$a)\quad \xi(\omega) = \xi^{+}(\omega) - \xi^{-}(\omega);$$

$$b)\quad |\,\xi(\omega)\,| = \xi^{+}(\omega) + \xi^{-}(\omega).\dagger \qquad (92)$$

Talvez valha a pena acrescentar que não há hipótese de indeterminação em 92a) porque $\xi^{+}(\omega)$ e $\xi^{-}(\omega)$ são ambos não-negativos e porque $\xi^{+}(\omega) = +\infty$ implica $\xi^{-}(\omega) = 0$.

Caso a função real $\xi(\omega)$ seja elementar [ou simples], podemos representar por x_h o ponto genérico do conjunto intransnumerável E, agora sem receio de confusão com alguma coordenada dum ponto x, e correspondentemente a *representação canónica* da fórmula 88") toma o aspecto

$$\xi(\omega) = \sum_{h} [x_h \cdot I_{\eta(\{x_h\})}(\omega)], \qquad (93)$$

com x_h ($h = 0,1,2, \ldots$) a percorrer E.

Se transcrevermos a fórmula 93) de ξ, h, x, η e E respectivamente para $\tilde{\xi}$, $\tilde{h}$, $\tilde{x}$, $\tilde{\eta}$ e $\tilde{E}$ a fim de metermos uma nova função elementar [ou simples], ficamos com a *representação canónica* de $\tilde{x} = \tilde{\xi}(\omega)$, pelo que a adaptação adequada da fórmula 91) e a convenção de representar por $\Sigma^{\#}$ um somatório Σ privado das parcelas onde figurem indicatrizes identicamente nulas constituem incidências conducentes às seguintes *representações intransnumeravelmente* [ou *finitamente*] *compatíveis e paralelas para as duas funções* ξ *e* $\tilde{\xi}$ (que têm importância na teoria da integração):

$$\xi(\omega) = \sum_{h,\tilde{h}}^{\#} [x_h \cdot I_{\eta(\{x_h\}) \wedge \tilde{\eta}(\{\tilde{x}_{\tilde{h}}\})}(\omega)] \qquad (94)$$

e

$$\tilde{\xi}(\omega) = \sum_{h,\tilde{h}}^{\#} [\tilde{x}_{\tilde{h}} \cdot I_{\eta(\{x_h\}) \wedge \tilde{\eta}(\{\tilde{x}_{\tilde{h}}\})}(\omega)],$$

com x_h ($h = 0,1,2, \ldots$) a percorrer E e com $\tilde{x}_{\tilde{h}}$ ($\tilde{h} = 0,1,2, \ldots$) a percorrer $\tilde{E}$.

† O primeiro membro de *b*) é o *módulo* ou *valor absoluto* de $\xi(\omega)$.

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções.

Caso $x = \xi(\omega)$ seja uma função boreliana ou uma tal função em sentido lato, a sua inversa η é por definição tal que, seja qual for $B \varepsilon \mathcal{B}$ ou $\overline{B} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}$, se tem $\eta(B) \varepsilon \mathcal{A}$ ou $\eta(\overline{B}) \varepsilon \mathcal{A}$. Nesta conformidade, vale o desenvolvimento do § 24, com $(X, \mathcal{B})$ ou $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$ particularizado numa recta de Borel, podendo surgir novas facilidades baseadas ou nas considerações introdutórias deste n.º ou noutras circunstâncias ainda por apresentar.

Neste contexto, vale a pena destacar o (algo repetitivo)

Teorema 59. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e dada a recta de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ ou a sua alargada $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$, considere-se a função real $x = \xi(\omega)$ definida em Ω, vulgar ou em sentido lato, com função inversa η. Nesta conformidade:

a) se ξ degenerar em constante, então ξ será uma função s. b.;

b) se ξ for a indicatriz dum conjunto $K \leqslant \Omega$, então $K \varepsilon \mathcal{A}$ institui ξ em função s. b. e $K \varepsilon \mathcal{A}^-$ faz com que ξ deixe de ser mensurável com respeito a $(X, \mathcal{B})$ ou $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$;

c) se ξ for uma função elementar [ou simples] com contradomínio $E = \{x_0, x_1, \dots, x_h, \dots\}$, então ξ resulta uma função e. b. [ou s. b.] se e só se, escolhido arbitrariamente um e só um valor h' de h, tiver lugar a relação

$$\eta(\{x_h\}) \varepsilon \mathcal{A} \text{ para qualquer } h \neq h', \tag{95}$$

equivalente a

$$\eta(\{x_h\}) \varepsilon \mathcal{A} \text{ para qualquer h admissível.»} \tag{96}$$

Demonstração. Trata-se duma transcrição de partes do teorema 56 de acordo com a situação presente.

Exemplo 85. Caso $\xi(\omega)$ seja uma função e. b. [ou s. b.], as relações 93) e 96) mostram que a representação 93) é *canónica e mensurável para a função* ξ e, caso $\xi(\omega)$ e $\tilde{\xi}(\omega)$ sejam duas funções e. b. [ou s. b.], as relações 94), 96) e 54b) mostram que as representações de 94) são *mensuráveis, intransnumeravelmente* [ou *finitamente*] *compatíveis e paralelas para as duas funções* ξ e $\tilde{\xi}$. Por outro lado, se compararmos as relações 93) e 96), reconhecemos imediatamente que uma função real e elementar [ou simples] é uma função e. b. [ou s. b.] ou, equivalentemente, é mensurável com respeito a (X,B) [eventualmente $(\overline{X},\overline{B})$] *se e só se for mensurável a sua representação canónica.* Esta propriedade, a compatibilidade intransnumerável [ou finita] da representação canónica duma função real e elementar [ou simples] e as facilidades especiais proporcionadas pela recta de Borel [eventualmente alargada] constituem a *chave para a elevada eficiência matemática das funções e. b.* [ou *s. b.*], da qual tiraremos partido em várias fases do nosso estudo.

Exercício 85. Suponha que $\Omega(\omega)$ é uma recta real alargada e que $A(\mathrm{A})$ é a álgebra-σ gerada pela classe que se compõe dos conjuntos elementares $\{\omega\}$ (compare-se com o exercício 51). Nesta conformidade, mostre que a função de ligação $x = \omega^2$ entre (Ω,A) e a recta de Borel alargada $(\overline{X},\overline{B})$ é uma função que *não* é mensurável com respeito a $(\overline{X},\overline{B})$, muito embora seja mensurável a sua representação canónica. Vale a pena comparar este resultado com a condição necessária e suficiente do exemplo 85.

2. Transmissão do carácter e. b. ou s. b. dumas funções para outras

Em seguida, vamos conservar as convenções do n.º **1** e vamos referir algumas situações em que, partindo de funções e. b. [ou s. b.] em número finito, se chega a uma nova função que ainda é e. b. [ou s. b.].

Neste contexto, proposta uma família intransnumerável formada por funções reais com domínio comum Ω, vamos chamar *determinado* ao resultado de qualquer associação dessas funções por meio de certas operações se e só se, seja qual for o ponto ω, a associação em causa conduzir a um e só um número real (eventualmente igual a $\pm\infty$). Claro que esta definição veda *indeterminações* como $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ e $x/0$ (esta por falta de sinal definido na hipótese $x \neq 0$).

A este propósito, aceitamos a *convenção de atribuir o valor* 0 *a todo o produto de números reais com um factor nulo* (mesmo que haja factores infinitos), *introduzimos as convenções* $0^0 = 1$ *e* $(\pm \infty)^0 = 1$ e, além disso, *supomos conhecidas a regra* $|\pm \infty| = + \infty$, *as regras relativas à divisão dum número finito por* $\pm \infty$ *e de* $\pm \infty$ *por um número finito e significativo, as regras relativas à multiplicação dum número finito de números significativos quando há factores iguais a* $\pm \infty$ (número positivo [ou negativo] multiplicado por $-\infty$ dá $-\infty$ [ou $+\infty$], etc.) *e as regras relativas à subtracção e à adição dum número finito de números reais quando há determinação, embora haja termos iguais a* $\pm \infty$ $((+\infty) - (-\infty) = +\infty$, etc.).

Posto isso, estamos aptos a enunciar o

Teorema 60. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ e dada a recta de Borel $[\mathrm{X}(x), B(\mathrm{B})]$ ou a sua alargada $[\overline{\mathrm{X}}(x), \bar{B}(\overline{\mathrm{B}})]$, é função e. b. [ou s. b.] toda a função $x = \xi(\omega)$ definida em Ω que seja:

a) o módulo duma função e. b. [ou s. b.];

b) a potência não-negativa e com expoente constante, finito e não-negativo, quando a respectiva base coincidir com uma função e. b. [ou s. b.] e não-negativa;

c) a parte positiva e a parte negativa duma função e. b. [ou s. b.];

d) o cociente determinado com dividendo e divisor iguais a funções e. b. [ou s. b.];

e) o produto dum número finito de funções e. b. [ou s. b.];

f) a combinação linear e determinada dum número finito de funções e. b. [ou s. b.] (incluindo os casos do produto duma constante por uma função e. b. [ou s. b.], da diferença entre duas funções e. b. [ou s. b.] e da soma dum número finito de funções e. b. [ou s. b.]).»

Demonstração· Nas alíneas b), d) e f) podemos igualar digamos a 0 a segunda função componente nos pontos em que ela deixar de ser definida, isto para efeitos de enquadramento no teorema 58 e no exemplo 83. Então, as alíneas a), b) e c) e o primeiro caso especial de f) decorrem imediatamente do teorema 58 na versão do exemplo 83 ou seja na versão N = 1, desde que se iguale aí (X', B') a (X, B) e $(\overline{X}', \overline{B}')$ a $(\overline{X}, \overline{B})$. As mesmas substituições e o teorema 58 na versão N = 2 justificam a alínea d) e o segundo caso especial de f). Por fim, as substituições referidas e o teorema 58 na versão geral N > 1 provam a parte remanescente da nossa tese.

Observação. A propósito do teorema 60, seguiu-se o *critério* de juntar num mesmo enunciado os casos mais imediatos de transmissão do carácter e. b. [ou s. b.] em que, por um lado, há só uma função transmissora (dum número finito de variáveis) e em que, por outro lado, pode ser preciso evitar as chamadas indeterminações. Partes da tese sustentarão desenvolvimentos ulteriores e outras partes, embora dispensáveis para esse fim, permitirão contornar discriminações de casos um tanto fastidiosas.

Exemplo 86. Desde que limitemos o teorema 60 ao caso de funções de partida *todas finitas*, a única convenção a introduzir será $0^0 = 1$, as regras de cálculo com números infinitos tornam-se desnecessárias e, além disso, as únicas indeterminações a evitar serão as provenientes dum divisor 0 no caso da alínea d).

Exemplo 87. Tomando em conta os pressupostos do teorema 60, reconhecemos que só podem surgir indeterminações ou em d) ou em f), no caso de f) com um mínimo de duas funções combinadas. *Num caso e noutro, o teorema* 60 *permanece válido se designarmos por* D *a parte de* Ω *onde houver determinação ou do cociente ou da combinação linear, se conservarmos esta grandeza em qualquer ponto* $\omega \varepsilon D$ *e se lhe atribuirmos o valor* 0 *em qualquer ponto* $\omega \varepsilon D^-$. Isto porque o teorema 58 continua a garantir que é e. b. [ou s. b.] a função definida em Ω através das convenções estabelecidas. — Supondo D propriamente contido em Ω e não-vazio, basta que se tenha $D \varepsilon A$ para que o teorema 45 estabeleça a *equivalência* entre a mensurabilidade do cociente ou da combinação linear, quando tomado na região de determinação D, e a mensurabilidade do cociente ou da combinação linear, quando estendido a Ω pelas convenções supracitadas. Por isso, convém-nos deduzir a relação $D\varepsilon A$ ou a relação equivalente $D^{-}\varepsilon A$, da qual trataremos sem nos preocupar com a hipótese O_{Ω} propriamente contido em D^{-} propriamente contido em Ω. — Nesta conformidade, não só vamos designar por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ as funções e. b. [ou s. b.] que se pretendem associar, como também vamos designar por $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ as respectivas funções inversas na acepção da fórmula 70). Então, no caso d) do teorema 60 ou seja no caso ξ_1/ξ_2, o boreliano $\{0\}$ propriamente contido em X_2 propriamente contido em $\overline{X}_2$ e os borelianos ∞ propriamente contido em $\overline{X}_1$ e ∞ propriamente contido em $\overline{X}_2$ conduzem à relação

$$D^{-} = [\eta_1(\infty) \wedge \eta_2(\infty)] \vee \eta_2(\{0\})\varepsilon A,$$

à qual pretendíamos chegar. Se tivermos o caso f) do teorema 60 com pelo menos duas funções combinadas e se, além disso, a combinação linear se reduzir à soma $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$, então os borelianos $\{-\infty\}$ e $\{+\infty\}$, tirados de cada uma das rectas $\overline{X}_n(n = 1,2, \ldots, N)$, conduzem à relação pretendida sob a forma

$$D^{-} = \bigvee_{1\leqslant m<n\leqslant N} ([\eta_m(\{-\infty\}) \wedge \eta_n(\{+\infty\})] \dot{+}$$
$$\dot{+} [\eta_m(\{+\infty\}) \wedge \eta_n(\{-\infty\})])\varepsilon A,$$

onde os pares m, n admissíveis são em número de $N(N-1)/2$ e onde a parcela genérica da união é uma soma insensível à permuta entre m e n e, portanto, à permuta entre ξ_m e ξ_n. Por fim, se as funções ξ_n entrarem na respectiva combinação linear com coeficientes reais c_n nem todos iguais a 1, então cada um desses coeficientes pode ser incorporado na função com o mesmo índice, isto sem qualquer prejuízo para a dedução precedente, desde que, seja qual for n, o símbolo η_n passe a representar a inversa da função e. b. [ou s. b.] $c_n\xi_n$. — O que mais interessa reter do atrás exposto é que *as chamadas indeterminações não influem significativamente no carácter e. b.* [ou *s. b.*] *das associações de funções do teorema* 60.

Exercício 86. Sendo $\Omega = \{1,2,3\}$ e $A = \{\Omega, O_\Omega, \{1\}, \{1\}^-\}$, considere a função real e simples $\xi(\omega)$ definida pelas igualdades $\xi(\{2\}) = \{2\}$ e $\xi(\{1,3\}) = \{-2\}$. Mostre que não é boreliana nenhuma das funções ξ^+, ξ^- e ξ e que é s. b. cada uma das funções $|\xi|$ e ξ^2.

Exercício 87. Prove que uma função real e elementar [ou simples] é uma função e. b. [ou s. b.] se e só se forem simultaneamente e. b. [ou s. b.] as suas partes positiva e negativa.

3. Redução duma função boreliana a um limite uniforme de funções e. b.

Posto isso, vamos recorrer à ideia referida em δ') do n.º **1** do § 24 para reduzir as funções reais e borelianas mais gerais a funções e. b. ou s. b. em termos de passagem ao limite ao longo duma sucessão.

Para começar, temos o

Teorema 61. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}), \overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$, então qualquer função boreliana $\mathrm{x} = \xi(\omega)$ coincide com o limite uniforme (em ω) duma sucessão formada por funções e. b.»

Demonstração. Se bem que o enunciado tenha sido posto em termos de funções borelianas em sentido lato, logo se reconhece que ele se aplica também às funções borelianas vulgares ou seja finitas (a este propósito pode consultar-se o n.º **4** do § 24).

Seja então E o contradomínio da função boreliana ξ do enunciado e seja η a sua função inversa na acepção da fórmula 70). Nesta conformidade, se k percorrer a sucessão ..., -2, $-1,0,1,2,\ldots$ formada por todos os números inteiros, podemos fazer corresponder a cada número natural n a função x_n definida em Ω e dada por

$$\mathrm{x}_n = \xi_n(\omega) = ((-\infty)\cdot \mathrm{I}_{\eta(\{-\infty\})}(\omega)) + \tag{97}$$

$$+ \Big(\sum_{-\infty<k\leqslant-1}\Big[\frac{k}{2^n}\cdot \mathrm{I}_{\eta(\{\frac{k}{2^n}\leqslant \mathrm{x}<\frac{k+1}{2^n}\})}(\omega)\Big]\Big) + (0\cdot \mathrm{I}_{\eta(\{0\})}(\omega)) +$$

$$+ \Big(\sum_{1\leqslant k<+\infty}\Big[\frac{k}{2^n}\cdot \mathrm{I}_{\eta(\{\frac{k-1}{2^n}< \mathrm{x}\leqslant\frac{k}{2^n}\})}(\omega)\Big]\Big) + ((+\infty)\cdot \mathrm{I}_{\eta(\{+\infty\})}(\omega)$$

$$(n = 1,2,3,\ldots)$$

onde cada símbolo I assinala a indicatriz do conjunto colocado em índice, conjunto esse obviamente contido em Ω.

Ora, seja qual for o valor de n, sucede que os argumentos de η em 97) constituem uma infinidade numerável de borelianos intervalares contidos em $\overline{X}$, não-degenerados à excepção de $\{-\infty\}$, $\{0\}$ e $\{+\infty\}$, disjuntos dois a dois, com soma igual a $\overline{X}$, tais que os seus transformados inversos resultam disjuntos dois a dois e com soma igual a Ω e, além disso, tais que, escolhido arbitrariamente um dos argumentos referidos digamos M, vale $\eta(M) = \eta(M \Delta E)$ (a este propósito pode consultar-se o n.º **2** do § 21). Agora das duas uma: ou $M \Delta E = O_{\overline{X}}$ e corresponde uma parcela do último membro de 97) que é *suprimível* por ser identicamente nula; ou $M \Delta E \neq O_{\overline{X}}$ e corresponde uma parcela do dito último membro que não só é factor numérico de $I_{\eta(M)}$ nos pontos ω enviados por ξ para M, como também vale 0 nos demais pontos ω. Concluímos que, seja qual for n, a função ξ_n da igualdade 97) resulta uma função elementar tal que o último membro, desembaraçado dos termos com indicatrizes identicamente nulas, fica instuído em representação compatível e até canónica, esta mensurável devido à relação $\eta(M) \varepsilon A$ para cada intervalo M em causa (a este propósito pode consultar-se o n.º **3** do § 21 e também o n.º **6** do § 22). Daí e do resultado do exemplo 85 (ou duma adaptação adequada da relação 96) do teorema 59) concluímos que são e. b. todas as funções $\xi_n(\omega)$ definidas por 97). Escusado será acrescentar: que a convenção $(\pm\infty) \cdot 0 = 0$ permite suprimir as parcelas extremas do segundo membro de 97) sempre que a função ξ for finita; que cada ξ_n assume o valor $+\infty$ [ou $-\infty$] no ponto ω se e só se ξ o assumir aí; que a parcela colocada a meio do último membro faz apenas *presença formal* para tornar bem patente o facto de cada ξ_n assumir o valor 0 no ponto ω se e só se ξ o assumir aí.

Chegados a este ponto, vamos *convencionar* que $\xi(\omega)$ é o *limite uniforme* das funções $\xi_n(\omega)$ (quando n tender para $+\infty$) se e só se, designado por U o conjunto formado pelos pontos ω tais que $\xi(\omega) \neq \xi_n(\omega)$ para algum n, ou U for vazio ou ξ_n tender para

ξ uniformemente (no sentido habitual) em U. Então, pertencem a U^- os eventuais pontos ω em que $\xi(\omega) = \pm \infty$; além disso, seja qual for o ponto $\omega \varepsilon U \neq O_\Omega$, a fórmula 97) faz corresponder a relação $|\xi(\omega) - \xi_n(\omega)| < 1/2^n \downarrow 0$ quando $n \uparrow + \infty$. Assim a função $\xi(\omega)$ será o limite uniforme das funções $\xi_n(\omega)$, o limite uniforme clássico no caso da finititude de $\xi(\omega)$ † e um limite uniforme um tanto convencional nos demais casos, c. q. d.

Observação. A demonstração do teorema 61 é *construtiva* no sentido em que ela administra, através de 97), uma sucessão que satisfaça às condições referidas no enunciado, além de dar um tratamento privilegiado aos eventuais valores 0 e $\pm \infty$ de x, quer dizer aos únicos valores que podem causar indeterminações. Claro que nada impede a existência de outras sucessões que satisfaçam também às ditas condições. Por outro lado, veremos mais adiante que a transmissão do carácter boreliano por passagem ao limite ao longo duma sucessão não exige qualquer comportamento especial do processo de tendência, pelo que a uniformidade do teorema 61 é menos importante do que a uniformidade similar estudada na teoria clássica das funções reais — a qual transfere propriedades (por exemplo, a continuidade) que sem ela poderiam extraviar-se.

O teorema 61 compreende casos particulares em que a tendência, além de ser uniforme, é também *monotónica.* Vejamos alguns.

Corolário 61'. «Com os mesmos dados do teorema 61, qualquer função boreliana e não-negativa [ou não-positiva] $x = \xi(\omega)$ coincide com o limite uniforme (em ω) duma sucessão decrescente [ou crescente] formada por funções e. b. não-negativas [ou não-positivas].»

---

† A relação precedente passa a valer para qualquer $\omega \varepsilon \Omega \geqslant U$.

Demonstração. A não-negatividade [ou não-positividade] da função ξ torna identicamente nulas as indicatrizes que figuram antes [ou depois] da parcela colocada a meio do último membro da igualdade 97), pelo que resulta não-negativa [ou não-positiva] cada uma das funções e. b. ξ_n cujo limite uniforme é ξ. Nesta conformidade, só falta provar que, escolhido arbitrariamente o valor de n, então, seja qual for ω tal que $0 < \xi(\omega) < +\infty$ [ou $0 > \xi(\omega) > -\infty$], vale a desigualdade $\xi_n(\omega) \geqslant \xi_{n+1}(\omega)$ [ou $\xi_n(\omega) \leqslant \xi_{n+1}(\omega)$]. Ora tal sucede efectivamente porque, quando se passa de n para n + 1,

cada intervalo $\{\frac{k-1}{2^n} < x \leqslant \frac{k}{2^n}\}$ [ou $\{\frac{k}{2^n} \leqslant x < \frac{k+1}{2^n}\}$] é meado,

pelo que a hipótese

$$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} < \xi(\omega) \leqslant \frac{2k-1}{2^{n+1}} \quad [\text{ou } \frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant \xi(\omega) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}]$$

acarreta $\xi_{n+1}(\omega) = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < \xi_n(\omega)$ [ou $\xi_{n+1}(\omega) = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \xi_n(\omega)$]

e a hipótese $\dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < \xi(\omega) \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}$ [ou $\dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \leqslant \xi(\omega) < \dfrac{2(k+1)}{2^{n+1}}$]

acarreta $\xi_{n+1}(\omega) = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \xi_n(\omega)$ [ou $\xi_{n+1}(\omega) = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} > \xi_n(\omega)$].

Fica assim completada a nossa demonstração.

Exemplo 88. Omitida a parcela colocada a meio do último membro de 97), o valor especial 0 deixa de chamar a atenção. Nesta conformidade, não só podemos deixar de exigir que cada ξ_n assuma o valor 0 no ponto ω se e só se ξ aí o assumir, como também podemos suprimir o segundo [ou primeiro] somatório do dito último membro para compensarmos através do prolongamento do outro somatório, por forma a incluir todo o k entre $-\infty$ e $+\infty$. Procedendo deste modo, então adaptações imediatas das demonstrações do teorema 61 e do corolário 61' mostram que as novas funções $\xi_n(\omega)$ assim obtidas são *funções e. b. formando uma sucessão crescente* [ou *decrescente*] *com limite uniforme igual a* $\xi(\omega)$.

4. Redução duma função boreliana a um limite de funções s. b.

Se bem que as passagens ao limite do teorema 61 e do corolário 61' sejam satisfatórias para os nossos propósitos imediatos, há situações (por exemplo no estudo dos integrais) em que é preferível exprimir uma função boreliana arbitrária como limite duma sucessão (eventualmente monotónica) formada por funções s. b., mesmo que este acréscimo de acessibilidade às funções de aproximação tenha de ser pago pela renúncia à uniformidade da tendência para o limite. Nesta ordem de ideias, vamos apresentar o

Teorema 62. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega),\mathcal{A}(\mathrm{A})]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}),\overline{\mathcal{B}}(\overline{\mathrm{B}})]$, então qualquer função boreliana e não-negativa $\mathrm{x} = \xi(\omega)$ coincide com o limite duma sucessão crescente formada por funções s. b. não-negativas.»

Demonstração. Podemos retomar o texto da parte inicial da demonstração do teorema 61, com boreliana e não-negativa em lugar de boreliana, com $\mathrm{E} \leqslant \{0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant +\infty\}$, com $\mathrm{k} = 1,2,3, \ldots$ e com 97) substituído por

$$\mathrm{x_n} = \xi_\mathrm{n}(\omega) = \Big(\sum_{1 \leqslant \mathrm{k} \leqslant \mathrm{n} \cdot 2^\mathrm{n}} \Big[\frac{\mathrm{k}-1}{2^\mathrm{n}} \cdot \mathrm{I}_{\eta(\{\frac{\mathrm{k}-1}{2^\mathrm{n}} \leqslant \mathrm{x} < \frac{\mathrm{k}}{2^\mathrm{n}}\})}(\omega)\Big]\Big) + \\ + \big(\mathbf{n} \cdot \mathrm{I}_{\eta(\{\mathrm{n} \leqslant \mathrm{x} < +\infty\})}(\omega)\big) + \big((+\infty) \cdot \mathrm{I}_{\eta(\{+\infty\})}(\omega)\big) \tag{98}$$

$(\mathrm{n} = 1,2,3, \ldots)$.

Em seguida, podemos continuar da mesma forma que no texto subsequente à fórmula 97), com as diferenças de que agora $\{+\infty\}$ é o único intervalo degenerado, que os intervalos envolvidos somam $\{0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant +\infty\} \geqslant \mathrm{E}$ e, por fim, que cada uma das funções ξ_n resulta não-negativa e simples e logo s. b. Claro que a finititude de ξ permite suprimir a última parcela do último membro de 98) (por passar a ser identicamente nula) e que cada ξ_n assume o valor $+\infty$ no ponto ω se e só se ξ o assumir aí.

Por outro lado, escolhido arbitrariamente o ponto ω, ou se tem $\xi(\omega) = +\infty = \xi_\mathrm{n}(\omega)$ para cada n ou se tem $\xi(\omega) < +\infty$, existe um valor particular ν de n tal que $\xi(\omega) < \nu$, qualquer $\mathrm{n} \geqslant \nu$ dá $0 \leqslant \xi(\omega) - \xi_\mathrm{n}(\omega) < 1/2^\mathrm{n}$ e $\mathrm{n}\uparrow +\infty$ faz com que $\xi_\mathrm{n}(\omega)$ tenda para

$\xi(\omega)$. Mas agora *o limite não é obrigatoriamente uniforme*, porque o número ν referido depende, em princípio, do ω escolhido. Por fim, o crescimento das funções ξ_n quando n cresce prova-se por uma adaptação do processo utilizado na parte final da demonstração do corolário 61', onde a passagem de n para n + 1 se ajusta por forma que $1 \leqslant k \leqslant n \cdot 2^n$ faça mear cada um dos intervalos $\{\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{2k}{2^{n+1}}\}$ e que $n \cdot 2^n < k \leqslant (n+1) \cdot 2^{n+1}$ conduza aos intervalos $\{n \leqslant x < n + \frac{1}{2^{n+1}}\}, \ldots, \{n + 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x < n + 1\}$ com soma igual à parte $\{n \leqslant x < n + 1\}$ de $\{n \leqslant x < +\infty\}$.

Observação. A demonstração do teorema 62 é *construtiva* no sentido em que ela administra, através de 98), uma sucessão que satisfaça às condições referidas no enunciado. Claro que pode haver outras sucessões que satisfaçam também a essas condições. — Por outro lado, podemos deixar de privilegiar o valor $+\infty$ e até podemos conseguir que as funções de aproximação sejam sempre *todas finitas* (sem perderem nenhuma das características restantes), isto se retomarmos o último membro de 98), se substituirmos aí $x < +\infty$ por $x \leqslant +\infty$ e, por fim, se suprimirmos em seguida a última parcela, a única proveniente dum intervalo degenerado. Com efeito: caso $\xi(\omega) \neq +\infty$ para qualquer ω, recaímos no estudo simplificado referido no decurso da demonstração do teorema 62, com a diferença agora meramente formal de se ter posto $x \leqslant +\infty$ em lugar de $x < +\infty$; caso $\xi(\omega)$ deixe de ser uma função finita, nada se modifica na dedução do limite nos pontos ω em que ξ for finito e nos demais pontos ω resulta $\xi(\omega) = +\infty = \lim_{n\uparrow+\infty} n = \lim_{n\uparrow+\infty} \xi_n(\omega)$. Resolvida assim a questão do limite, não há dificuldade em reconhecer que as novas funções ξ_n são todas s. b. não-negativas e formam uma sucessão crescente. — Podemos acrescentar que a variante agora exposta é usada frequentemente.

Posto isso, vamos antecipar certos casos particulares do futuro teorema 64 através do

Lema 62_1. «Com os mesmos dados do teorema 62, qualquer função boreliana ξ é tal que resultam também borelianas as funções $-\xi$, ξ^+ e ξ^-.»

Demonstração. Sendo $-\xi = \xi'$ a simétrica da função $\xi(\omega)$ e sendo η' a função inversa de ξ', então, atendendo ao teorema 19 e à borelianidade de ξ, vale $\eta'(\{\xi' = -\infty\}) = \eta(\{\xi = +\infty\}) \varepsilon A$ e, seja qual for o número finito a, vale $\eta'(\{-\infty < \xi' < a\}) = = \eta(\{-a < \xi < +\infty\}) \varepsilon A$. Por outro lado, a alínea d) do n.º **3** do § 14 e o corolário 21' mostram que os argumentos de η' acima usados perfazem uma classe geradora de $\overline{B}$. Logo o teorema 46 prova a borelianidade de $-\xi$.

Falta provar a borelianidade das funções ξ^+ e $\xi^- = (-\xi)^+$. Cada uma delas é a truncada duma função boreliana pelo conjunto dos pontos ω em que essa função assume valores negativos, quer dizer pelo transformado inverso do intervalo $\{-\infty \leqslant x < 0\}$. O transformado referido pertence a A, pelo que o teorema *48* prova a borelianidade de ξ^+ e a de ξ^-, c. q. d.

A consequência mais importante do teorema 62 e do lema 62_1 é o

Corolário 62'. «Com os mesmos dados do teorema 62, qualquer função boreliana $x = \xi(\omega)$ coincide com o limite duma sucessão formada por funções s. b.»

Demonstração. Sabemos, pela fórmula 92a) e pelo lema 62_1, que $x = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega)$, onde o diminuendo x^+ e o diminuidor $x^- = = (-x)^+$ são funções borelianas e não-negativas para as quais $+\infty$ não pode ser valor comum em nenhum ponto ω. Ora o teorema 62 permite igualar x^+ [ou $(-x)^+$] ao limite duma sucessão (crescente) formada por funções $x_n^+ = \xi_n^+(\omega)$ [ou $(-x_n)^+ = (-\xi_n)^+(\omega)$] s. b., não-negativas e dadas por um ajuste adequado da fórmula 98) (e logo finitas se ξ for uma função finita). Mas, as funções x_n^+ [ou $(-x_n)^+$] andam solidárias com x^+ [ou $(-x)^+$] para efeitos do valor $+\infty$ e, portanto, as diferenças $x_n^+ - (-x_n)^+ = \xi_n(\omega)$ resultam todas determinadas. Nestes termos, quando $n\uparrow +\infty$, então $\xi_n(\omega)$ tende para $\xi(\omega)$, pelo que a nossa demonstração fica completada se tomarmos em conta que a alínea f) do teorema 60 institui em função s. b. cada uma das diferenças $\xi_n(\omega)$.

Observação. É óbvio que as diferenças $x_n^+ - (-x_n)^+$ da demonstração precedente *em geral não formam uma sucessão monotónica.* Por outro lado, o corolário 62' e as fórmulas 93) e 96) mostram que *qualquer função boreliana é limite duma sucessão composta por combinações lineares, cada uma das quais se forma à custa dum número finito de indicatrizes de conjuntos mensuráveis, estes tirados do espaço mensurável inicial.* Eis um *resultado surpreendentemente singelo* para uma classe de funções que é muito vasta e onde cabem funções complicadas (conforme veremos mais adiante).

Exercício 88. Mostre que é uniforme (no sentido do teorema 61) o limite da sucessão utilizada na demonstração do corolário 62', isto sempre que a função boreliana ξ aí considerada for uma função *limitada na parte finita do seu contradomínio.*

Exercício 89. Com os mesmos dados do teorema 62, escolha arbitrariamente uma função boreliana $x = \xi(\omega) \geqslant 0$ e mostre que as funções

$$x_n = \xi_n(\omega) = (0 \cdot I_{\eta(\{0\})}(\omega)) +$$

$$+ (\sum_{1 \leqslant k \leqslant n \cdot 2^n} [\frac{k}{2^n} \cdot I_{\eta(\{\frac{k-1}{2^n} < x \leqslant \frac{k}{2^n}\})}(\omega)]) +$$

$$+ ((+\infty) \cdot I_{\eta(\{n < x \leqslant +\infty\})}(\omega)) \ (n = 1,2,3, \ldots)$$

formam uma sucessão decrescente, são funções s. b. não-negativas e, por fim, são tais que $n \uparrow +\infty$ implica $\xi_n(\omega) \downarrow \xi(\omega)$ e que cada ξ_n assume o valor 0 no ponto ω se e só se ξ o assumir aí.

Exercício 90. Retome a fórmula 97) do teorema 61 e a fórmula 98) do teorema 62 e substitua aí, sempre que for possível, o coeficiente duma indicatriz pelo ponto médio do intervalo a que diz respeito essa indicatriz. Em seguida, refaça a teoria em termos decalcados dos acima assinalados e indique as eventuais (des)vantagens do procedimento adoptado.

5. Supremo, ínfimo e sublimites extremos

Vimos, nos n.[os] **3** e **4**, que toda a função boreliana é limite duma sucessão formada por funções e.b. e até por funções s.b. Põe-se a questão de indagar se qualquer limite duma tal sucessão vem a ser obrigatoriamente uma função boreliana. A seguir resolveremos a questão posta e até a ultrapassaremos consideravelmente.

Comecemos por expor sucintamente uma noção de supremo [ou ínfimo], eventualmente máximo [ou mínimo], gizada em termos convenientes para os nossos propósitos. Nesta conformidade, consideremos um conjunto não-vazio Y, de ponto genérico y pertencente à recta real alargada $\overline{X}(x)$. Vamos igualar $\overline{X}$ à soma de dois conjuntos, a saber: um Y' formado por todos os $x < +\infty$ [ou $x > -\infty$] especiais, sejam x', tais que haja algum $y > x'$ [ou $y < x'$]; outro $Y'' = Y'^{-}$ formado por todos os x especiais, sejam x'', tais que não haja nenhum $y > x''$ [ou $y < x''$].

Então, *há três hipóteses* (exaustivas e mutuamente exclusivas):

ou Y' é vazio, o que sucede se e só se $Y = \{-\infty\} = \{S\}$ [ou $Y = \{+\infty\} = \{s\}$];

ou $Y'' = \{+\infty\} = \{S\}$ [ou $Y'' = \{-\infty\} = \{s\}$], o que sucede se e só se $+\infty$ [ou $-\infty$] for elemento e/ou ponto de acumulação de Y;

ou Y' e $Y'' - \{+\infty\}$ [ou Y' e $Y'' - \{-\infty\}$] são ambos não-vazios, existem números $y > -\infty$ [ou $y < +\infty$] e logo existem números $x' > -\infty$ [ou $x' < +\infty$], os números y resultam limitados à direita [ou esquerda], haverá números $x'' < +\infty$ [ou $x'' > -\infty$] e a impossibilidade de se ter alguma vez $x' \geqslant x''$ [ou $x'' \geqslant x'$] faz com que o (conhecido) *axioma da separação relativo a números reais e finitos* garanta a existência dum e dum só número finito S [ou s] *separador* † de Y' e Y''.

---

† Em rigor, trata-se dum melhoramento do axioma, que é quase imediato e a que se pode chamar *teorema da continuidade de Dedekind* (pág. 25 do Vol. I de OSTROWSKI da bibliografia).

Chegados a este ponto, estamos aptos a dar a seguinte *definição:*

Ao número S [ou s], assinalado em cada uma das três hipóteses supracitadas, vamos chamar *supremo* [ou *ínfimo*] de Y e vamos representá-lo por

$$S = \sup_{y \epsilon Y} y \text{ [ou } s = \inf_{y \epsilon Y} y].$$

O caso especial em que $S \varepsilon Y$ [ou $s \varepsilon Y$] pode ser destacado, chamando a S *máximo* [ou s *mínimo*] de Y e usando o simbolismo

$$S = \max_{y \epsilon Y} y \text{ [ou } s = \min_{y \epsilon Y} y].$$

Sempre que o número S [ou s] deixar de ser máximo [ou mínimo], ele terá de ser um *ponto de acumulação à direita* [ou *à esquerda*] em relação a Y, uma situação de recurso que não pode produzir-se na primeira hipótese por causa da singularidade de Y, que é imposta pela própria índole da segunda hipótese e que a terceira hipótese faz decorrer do facto de qualquer x' arbitrariamente próximo de S [ou s] impor a existência dum $y > x'$ [ou $y < x'$], o qual y agora não pode ser igual a S [ou s] e muito menos pode ser $> S$ [ou $< s$], porque a tal se opõe a existência (absurda) de números x" nesse caso intercalados entre y e S [ou *s*].

Em face do exposto, apresentamos a seguinte *definição alternativa:*

Dado um conjunto não-vazio $Y \leqslant \overline{X}$, o seu *supremo* [ou *ínfimo*] é o único número $S \varepsilon \overline{X}$ [ou $s \varepsilon \overline{X}$] tal que nenhum $y \varepsilon Y$ seja $> S$ [ou $< s$] e que haja elementos $y \varepsilon Y$ em qualquer intervalo a que pertença S [ou s] na qualidade de extremo direito [ou esquerdo].

A prova da equivalência entre as duas definições de supremo [ou ínfimo] supracitadas é um exercício de rotina que deixamos ficar ao cuidado do leitor. Note-se que a primeira definição garante a existência e a unicidade do supremo [ou ínfimo], a partir do axioma da separação, † e que a definição alternativa é formalmente mais acessível, mas teoricamente condicionada por pres-

† Melhorado no sentido da nota anterior.

supor a existência de pelo menos um número S [ou s]. Por outro lado, a definição alternativa torna imediato que $s \leqslant S$, isto por causa de $s \leqslant y$ e $y \leqslant S$ para qualquer $y \varepsilon Y$. Assim $s = S$ se e só se for singular o conjunto Y.

Posto isso, dado um conjunto não-vazio $Y \leqslant \overline{X}$ e formado por números y, vamos denominar *simétrico de* Y e vamos representar por $-Y$ o conjunto formado pelos números $-y$ que são simétricos dos $y \varepsilon Y$. Como há equivalência entre as relações $y \varepsilon Y$ e $-y \varepsilon -Y$, basta seguir as definições alternativas de supremo e de ínfimo para reconhecer que: o ínfimo s de Y é tal que nenhum $-y \varepsilon -Y$ resulta $> -s$; há elementos $-y$ em qualquer intervalo a que pertença $-s$ na qualidade de extremo direito; o simétrico do ínfimo de Y coincide com o supremo de $-Y$. Fica assim provada a fórmula

$$\inf_{y \epsilon Y} y = - \sup_{-y \epsilon -Y} (-y), \tag{99}$$

a qual permite fazer o estudo dos ínfimos à custa do estudo dos supremos e comporta casos particulares interessantes, entre os quais citamos o caso em que Y é *simétrico* (quer dizer igual a $-Y$) e o caso em que há *extremo* (quer dizer máximo ou mínimo).

Observação. Caso se trabalhe na recta real vulgar X em lugar da sua alargada $\overline{X}$, as três hipóteses relativas ao conjunto não-vazio Y (apresentadas no início deste n.º) reduzem-se no sentido de ficarem excluídos os números $\pm \infty$. Assim, a primeira hipótese desaparece e a segunda só pode subsistir se Y for ilimitado à direita [ou à esquerda], caso esse em que não haverá supremo [ou ínfimo] (a não ser que $\overline{X}$ «conceda emprestar» a X o número $+\infty$ [ou $-\infty$]).

Vale a pena particularizar o atrás exposto, supondo que os números $y \varepsilon Y$ se constituem em sucessão formada por números $y_n (n = 1,2,3, \ldots)$, cujo índice n vamos redesignar por m sempre que ele aparecer em segunda versão. Neste contexto, as igualdades de definição

$$\overline{\lim_{n \uparrow +\infty}} \, y_n = \inf_{1 \leqslant m < +\infty} \left(\sup_{m \leqslant n < +\infty} y_n \right)$$

e

$$\underline{\lim_{n \uparrow +\infty}} \, y_n = \sup_{1 \leqslant m < +\infty} \left(\inf_{m \leqslant n < +\infty} y_n \right) \tag{100}$$

são tais que cada uma delas conduz a um número único, ou finito ou igual a $\pm \infty$, e que as duas generalizam a fórmula 21) (referida a um ponto fixo ω), dum modo que passamos a analisar.

Sendo L [ou l] o primeiro [ou segundo] dos números definidos por 100), então o facto de $\{m \leqslant n < +\infty\}$ ser um conjunto que perde o primeiro elemento quando se passa de m para m + 1 é um facto que obriga os supremos L_m [ou ínfimos l_m] que devem ser infimados [ou supremados] a constituir-se em sucessão decrescente [ou crescente], cujo limite certamente existe e é obrigado, pela definição alternativa de ínfimo [ou supremo], a ser igual a L [ou l]. Agora apresentam-se duas alternativas (exaustivas e incompatíveis): ou existe uma subsucessão formada por supremos L'_p [ou ínfimos l'_p] que decresce [ou cresce] estritamente; ou então existe um número natural M tal que $L_m = L$ [ou $l_m = l$] para $m \geqslant M$.

Na primeira hipótese, seja qual for p, a definição alternativa de supremo [ou ínfimo] faz com que exista um $y'_p \varepsilon Y$ tal que $L < y'_p \leqslant L'_p$ [ou $l > y'_p \geqslant l'_p$] e assim, mesmo que os y'_p não sejam todos distintos entre si na qualidade de elementos de Y, pode extrair-se deles uma subsucessão decrescente [ou crescente] formada por elementos diversificados $y''_q \varepsilon Y$ tais que

$$L = \lim_{p \uparrow +\infty} L'_p \geqslant \lim_{q \uparrow +\infty} y''_q \geqslant L \text{ [ou } l = \lim_{p \uparrow +\infty} l'_p \leqslant \lim_{q \uparrow +\infty} y''_q \leqslant l\text{]}.$$

Na outra hipótese surgem dois casos: ou há infinitos números $y_n = L$ [ou l] ou não os há, caso este em que existe um valor particular $m' \geqslant M$ de m tal que $L_{m'} = L$ [ou $l_{m'} = l$] e também tal que os números $y_n \varepsilon Y$ supremados por $L_{m'}$ [ou infimados por $l_{m'}$] resultam todos distintos de L [ou l] e, portanto, admitem L [ou l] para ponto de acumulação.

Em face do exposto, concluímos que L [ou l] é sempre um *sublimite* de Y, quer dizer o limite duma subsucessão de Y. Mas há mais: L [ou l] será o *sublimite máximo* [ou *mínimo*] de Y, quer dizer tal que não existe nenhum sublimite maior [ou menor], isto porque, se os y_r formarem uma subsucessão dos y_n tal que exista $\lim_{r\uparrow+\infty} y_r = \rho$, então

$$L = \lim_{r\uparrow+\infty} L_r = \lim_{r\uparrow+\infty} (\sup_{r\leqslant n<+\infty} y_n) \geqslant \rho$$

$$[\text{ou } l = \lim_{r\uparrow+\infty} l_r = \lim_{r\uparrow+\infty} (\inf_{r\leqslant n<+\infty} y_n) \leqslant \rho].$$

Por outras palavras, acabamos de provar o

Lema 63_0. «Dada uma sucessão $Y = \{y_1, y_2, \dots , y_n, \dots\}$, contida na recta real alargada $\overline{X}$, os números univocamente determinados pelas duas igualdades 100) são, por ordem, o sublimite máximo e o sublimite mínimo de Y (cuja existência fica assegurada, com a particularidade de o segundo não poder exceder o primeiro).»

Exemplo 89. As fórmulas 100) e 99) permitem chegar a uma igualdade que estabelece os sublimites mínimos à custa dos sublimites máximos e que pode tomar a forma

$$\underline{\lim}_{n\uparrow+\infty} y_n = - \overline{\lim}_{n\uparrow+\infty} (- y_n). \tag{99'}$$

Com efeito, vale

$$\underline{\lim}_{n\uparrow+\infty} y_n = \sup_{1\leqslant m<+\infty} (-(- \inf_{m\leqslant n<+\infty} y_n)) = - \inf_{1\leqslant m<+\infty} (- \inf_{m\leqslant n<+\infty} y_n) =$$

$$= - \inf_{1\leqslant m<+\infty} (\sup_{m\leqslant n<+\infty} (- y_n)) = - \overline{\lim}_{n\uparrow+\infty} (- y_n).$$

Deixando o exemplo, tome-se o espaço $\Omega(\omega)$ e a recta real alargada $\overline{X}(x)$ e considere-se uma família formada por funções $x_t = \xi_t(\omega)$ $(t\varepsilon T)$, definidas em Ω e todas com contradomínio contido em $\overline{X}$. Então, escolhido arbitrariamente um ponto ω, corresponde o conjunto formado pelos números $\xi_t(\omega)\varepsilon\overline{X}(t\varepsilon T)$, o qual admite um e só um supremo (numérico) $S(\omega) = \sup_{t\epsilon T} x_t$ [ou ínfimo (numérico) $s(\omega) = \inf_{t\epsilon T} x_t$]. Nesta conformidade, se fizermos variar ω ao longo de Ω, resulta um

supremo $S(\omega) = \sup_{t\epsilon T} \xi_t(\omega)$ [ou *ínfimo* $s(\omega) = \inf_{t\epsilon T} \xi_t(\omega)$], *que é uma função definida em* Ω e a que poderíamos chamar função suprema [ou ínfima] em relação às funções dadas $\xi_t(\omega)$. No caso especial de t ser o número natural genérico *n*, subsiste tudo quanto acabamos de dizer e, além disso, os sublimites máximo e mínimo definidos através da fórmula 100) dão, com ω a variar ao longo de Ω, duas funções definidas em Ω, a saber

$$\overline{\lim_{n\uparrow+\infty}}\ \xi_n(\omega) \quad \text{e} \quad \underline{\lim_{n\uparrow+\infty}}\ \xi_n(\omega),$$

que são respectivamente *o sublimite máximo e o sublimite mínimo das funções* $\xi_n(\omega)$ $(n = 1,2,3, \ldots)$ (constituídas em sucessão).

Em face do exposto, estamos aptos a preparar a parte final do § 25 através do

Lema 63_1. «Considerem-se o espaço $\Omega(\omega)$, a recta real alargada $\overline{X}(x)$ e a família de funções $x_t = \xi_t(\omega)$ $(t\varepsilon T)$ definidas em Ω, todas com contradomínio contido em $\overline{X}$ e com funções inversas η_t. Então, sendo $s(\omega)$ o ínfimo das funções $\xi_t(\omega)$ e sendo σ a função inversa de s, qualquer número real e finito b conduz à igualdade entre conjuntos

$$\sigma(\{-\infty \leqslant s(\omega) < b\}) = \bigvee_{t\varepsilon T} \eta_t(\{-\infty \leqslant \xi_t(\omega) < b\}).\text{»} \qquad (101)$$

Demonstração. Escolhido arbitrariamente um $t\varepsilon T$, a hipótese de $\xi_t(\omega)$ enviar ω para o intervalo $I_b = \{-\infty \leqslant x < b\}$ é uma hipótese que implica que $s(\omega) \leqslant \xi_t(\omega)$ envie também ω para I_b; assim se conclui que a parcela genérica do segundo membro de 101) está contida no respectivo primeiro membro, pelo que, atendendo à nota posta a propósito da fórmula 16), o segundo membro de 101) é um subconjunto do respectivo primeiro membro. Por outro lado, caso $s(\omega)$ envie um certo ω para I_b, então é impossível que cada uma das funções $\xi_t(\omega)$ — infimadas por $s(\omega)$ —envie esse ω para um número $\geqslant$ b, pelo que todo o ponto pertencente ao primeiro membro de 101) pertence a uma das parcelas do segundo membro, como quem diz o primeiro membro de 101) é um subconjunto do respectivo segundo membro. Nesta conformidade, encontra-se justificada a igualdade da tese.

Observação. Guardamos um novo exemplo e certos exercícios relacionados com a matéria deste n.º para o n.º seguinte, onde terão melhor cabimento.

6. Limites de sucessões formadas por funções borelianas

O que precede não envolve o conceito de mensurabilidade nem de conjuntos nem de funções. Passando a introduzir esses conceitos, vamos apresentar o *teorema básico* deste n.º. Ei-lo:

Teorema 63. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}), \overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$, considere-se uma família intransnumerável formada por funções $\xi_n(\omega)$ $(n = 1,2,3, \ldots)$, todas elas borelianas. Então, o ínfimo $s(\omega)$ [ou supremo $S(\omega)$] das funções consideradas resulta, por sua vez, uma função boreliana.»

Demonstração. a) Comecemos pela parte da tese relativa ao ínfimo. Nesta conformidade, a relação 101) do lema 63_1 (com t substituído por n), a hipótese da borelianidade das funções ξ_n e, por fim, a propriedade 54b) impõem, seja qual for o número finito b, a nova relação $\sigma(\{-\infty \leqslant x < b\}) \varepsilon A$. Ora os exemplos 68 e 69 e o corolário 10' dão $\sigma(\{s = -\infty\}) = \underset{n}{\wedge} \sigma(\{-\infty \leqslant s < -n\}) \varepsilon A$ e $\sigma(\{-\infty < s < b\}) = \sigma(\{-\infty \leqslant s < b\}) - \sigma(\{s = -\infty\}) \varepsilon A$, pelo que σ se encontra nas mesmas condições que η' da demonstração do lema 62_1 (com b em lugar de a). Assim concluímos que $s(\omega)$ é uma função boreliana.

b) Escreva-se a relação 99) sob a forma

$$S(\omega) = \sup_n \xi_n(\omega) = -\inf_n [-\xi_n(\omega)]. \qquad (102)$$

Então, a parte a) da nossa demonstração e duas aplicações do lema 62_1 provam que também $S(\omega)$ é uma função boreliana, c. q. d.

A consequência mais importante do teorema 63 é o

Corolário 63'. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(A)]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{X}(x), \overline{B}(\overline{B})]$, considere-se uma *sucessão* formada por funções borelianas $\xi_n(\omega)$ $(n = 1,2,3, \ldots)$. Então, os sublimites mínimo e máximo da sucessão são funções definidas em Ω, que resultam ambas borelianas.»

Demonstração. O lema 63_0 não só garante que os dois sublimites referidos existem em Ω, como também permite exprimí-los à custa da fórmula 100), onde o papel dos y_n passa a ser assumido pelas grandezas $\xi_n(\omega)$. Em seguida, duas aplicações consecutivas do teorema 63 provam, em cada uma das duas alternativas, que o respectivo *sublimite extremo* (ou máximo ou mínimo) é uma função boreliana, c. q. d.

Notando que um limite (fixo ou variável com ω), tirado em $\overline{X}$, só pode apresentar valores finitos ou iguais a $\pm \infty$, por outras palavras que não há cabimento para «ficções» de limites infinitos sem sinal declarado †, passamos para o

Corolário 63''. «Caso as funções borelianas $\xi_n(\omega)$ do corolário 63' formem uma sucessão com função-limite definida em Ω, esta será por sua vez uma função boreliana.»

Demonstração. Sabemos que, escolhido arbitrariamente o ponto ω, a hipótese de existir $\lim\limits_{n \uparrow +\infty} \xi_n(\omega)$ obriga este limite a ser o valor comum de todos os sublimites das funções ξ_n, tomadas no ponto ω. Então, admitida a existência da função-limite nos termos do enunciado, esta identifica-se com cada um dos sublimites extremos do corolário 63' e, por isso, não pode deixar de ser uma função boreliana, c. q. d.

Por fim, a questão formulada no início do n.º **5** pode receber resposta adequada através do

Corolário 63'''. «Dados os espaços mensuráveis do teorema 63, uma função $x = \xi(\omega)$ é uma função boreliana (em sentido lato)

† Quer dizer não se aceita o *conjunto* ∞ como possível *valor* dum limite.

se e só se ela for o limite [ou limite uniforme] duma sucessão formada por funções s. b. [ou e. b.].»

Demonstração. Comecemos por referir que a uniformidade mencionada no enunciado deve ser entendida nos termos convencionados no decurso da demonstração do teorema 61. Então, não só a condição suficiente do enunciado é uma consequência imediata do corolário 63'', como também a respectiva condição necessária resulta do corolário 62' [ou do teorema 61].

Exemplo 90. Seja L [ou l] o sublimite máximo [ou mínimo] da sucessão formada pelos números reais y_n ($n = 1,2,3, \dots$), todos pertencentes à recta real alargada $\overline{X}(x)$. Então, supondo $L < +\infty$ [ou $l > -\infty$] e escolhido arbitrariamente um $x > L$ [ou $x < l$], não pode haver infinitos $y_n \geqslant x$ [ou $y_n \leqslant x$] porque, se os houvesse, deles se extraía um sublimite dos y_n que seria $> L$ [ou $< l$]. Daí se conclui o seguinte: o caso $L = -\infty$ [ou $l = +\infty$] faz corresponder a qualquer x finito apenas um número finito de excepções à desigualdade $y_n < x$ [ou $y_n > x$] e, por isso, impõe a relação $\lim\limits_{n\uparrow+\infty} y_n = -\infty$ [ou $+\infty$]; o caso de L e l terem um valor comum λ finito faz corresponder a todo o $\varepsilon > 0$ apenas um número finito de excepções à dupla desigualdade $\lambda - \varepsilon < y_n < \lambda + \varepsilon$ e, por isso, impõe a relação $\lim\limits_{n\uparrow+\infty} y_n = \lambda$. Como $L = -\infty$ [ou $l = +\infty$] conduz a $L \geqslant l = -\infty$ [ou $l \leqslant L = +\infty$], reconhecemos o seguinte: *não só a existência do limite torna necessária a igualdade entre os sublimites máximo e mínimo* (conforme mencionámos a propósito da demonstração do corolário 63''), *como também a dita igualdade é suficiente para que haja limite* (igual ao valor comum dos dois sublimites extremos).

Exercício 91. Dada a sucessão formada pelos números y_n($n = 1,2,3, \dots$), todos pertencentes à recta real alargada $\overline{X}(x)$, prove que tem lugar a (tripla) desigualdade

$$\inf_{1\leqslant n<+\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\uparrow+\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\uparrow+\infty} y_n \leqslant \sup_{1\leqslant n<+\infty} y_n;$$

examine os casos de igualdade (um deles já tratado no exemplo 90).

Exercício 92. Dada a sucessão do exercício 91, é possível igualar $\overline{X}$ à soma de dois conjuntos: um Y^* formado por todos os x especiais, sejam x^*, tais que haja infinitos $y_n \geqslant x^*$ [ou $y_n \leqslant x^*$]; outro $Y^{**} = Y^{*-}$ formado por todos os x especiais, sejam x^{**}, tais que haja apenas um número finito (eventualmente nulo) de termos $y_n \geqslant x^{**}$ [ou $y_n \leqslant x^{**}$]. — Utilize Y^*, Y^{**} e, em caso de incidência, o único número finito que separa Y^* e Y^{**} para proceder a uma caracterização alternativa dos sublimites extremos da sucessão dada. Em seguida, veja o que se passa com o esquema supracitado quando se parte dum conjunto não-vazio $Y \leqslant \overline{X}$ que não seja necessariamente uma sucessão.

Exercício 93. Retome a situação do lema 63_1, substituindo aí o ínfimo $s(\omega)$ pelo supremo $S(\omega)$ das funções $\xi_t(\omega)$, supremo esse com função inversa τ. Mostre que, seja qual for o número real e finito b, se tem a igualdade

$$\tau(\{-\infty \leqslant S(\omega) \leqslant b\}) = \bigwedge_{t \in T} \eta_t(\{-\infty \leqslant \xi_t(\omega) \leqslant b\}).$$

Será possível utilizar este resultado para modificar a parte b) da demonstração do teorema 63 de modo a evitar o uso do lema 62_1?

§ 26 — NOVAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES BORELIANAS E RELACIONAMENTO COM A ANÁLISE CLÁSSICA

1. Casos particulares mais importantes de transmissão do carácter boreliano

Recordemos as convenções relativas a (in)determinações do n.º **2** do § 25 e vamos generalizar o teorema 60 a funções borelianas arbitrárias através do

Teorema 64. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(\mathrm{A})]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}), \overline{\mathcal{B}}(\overline{\mathrm{B}})]$, é boreliana toda a função $\mathrm{x} = \xi(\omega)$, definida em Ω, que seja:

a) o módulo duma função boreliana;

b) a potência não-negativa e com expoente constante, finito e não-negativo, quando a respectiva base for uma função boreliana e não-negativa;

c) a parte positiva e a parte negativa duma função boreliana;

d) o cociente determinado com dividendo e com divisor iguais a funções borelianas;

e) o produto dum número finito de funções borelianas;

f) a combinação linear e determinada dum número finito de funções borelianas (incluindo os casos do produto duma constante por uma função boreliana, da diferença entre duas funções borelianas e da soma dum número finito de funções borelianas).»

Demonstração. Comecemos por notar que o enunciado cobre as funções borelianas não alargadas (a este propósito pode consultar-se a parte final do n.º **4** do § 24). Posto isso, a alínea c) já foi vista a propósito do lema 62_1; nas restantes alíneas do enunciado vamos substituir cada uma das funções borelianas a transformar sucessivamente pela primeira, pela segunda, etc., pela n-ésima, etc. função e. b. que a fórmula 97) lhe faz corresponder, isto com valor substituto ou $-\infty$ ou 0 ou $+\infty$ num ponto ω se e só se o respectivo número for também o valor original no mesmo ponto ω (a este propósito pode consultar-se o texto subsequente à fórmula 97)). Nesta conformidade, a respectiva associação de funções, por hipótese determinada em Ω, é substituída por uma sucessão de associações decalcadas, todas elas determinadas em Ω e logo todas elas e. b. (conforme vimos no teorema 60). Ora o comportamento específico dos valores $-\infty$, 0 e $+\infty$ das funções tiradas da fórmula 97) impõe, quando $n\uparrow+\infty$, não só que o teorema 61 faça tender (em Ω) qualquer sucessão de associações decalcadas para a associação de funções que lhe deu origem, como também que o corolário 63'' obrigue a última associação a ser uma função boreliana, c. q. d.

Exemplo 91. Vale a seguinte *propriedade:* «O teorema 64 permanece válido se suprimirmos a exigência de determinação das alíneas d) e f), sob a condição de escolhermos digamos o valor 0 para o ociente ou para a combinação linear nos eventuais pontos $\omega\varepsilon D^- \neq O_\Omega$, com D igual ao conjunto *mensurável* coincidente com a parte de Ω em que houver determinação.» — Com efeito, o caso $D = O_\Omega$ é imediato porque nos faz cair na constante 0, tomada em Ω. Nos demais casos, a dedução da mensurabilidade de D, feita no exemplo 87, permanece válida, mesmo que se trabalhe com funções borelianas arbitrárias em lugar de trabalhar com funções e. b. Então, as associações de aproximação (cociente ou combinações lineares) utilizadas na demonstração do teorema 64 tornam-se todas determinadas nos pontos $\omega\varepsilon D$ e, além disso, tornam-se todas indeterminadas nos pontos $\omega\varepsilon D^-$, nos quais vamos substituir cada uma delas pelo número 0. As associações assim ajustadas são todas funções e. b., por causa do resultado do exemplo 87; além disso, quando $n\uparrow+\infty$, elas tendem para a função de ω cuja borelianidade vem afirmada no enunciado, uma borelianidade que não pode falhar por causa do corolário 63".

Exemplo 92. Pode perguntar-se como se passam as coisas quando as funções borelianas $\xi_n(\omega)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ do corolário 63" deixam de ter limite definido em Ω. Uma possibilidade de tratar o caso será trabalhar com um dos sublimites extremos, cujo carácter boreliano fica garantido pelo corolário 63'. Outra possibilidade é a seguinte:

Atribua-se o valor 0 à diferença $\xi(\omega)$ entre o sublimite máximo $L(\omega)$ e o sublimite mínimo $l(\omega)$, quando tomada nos eventuais pontos $\omega \varepsilon D^-$, com D^- a referir o conjunto caracterizado pela relação $l(\omega) = L(\omega) = \pm \infty$. Sabemos, pelos exemplos 87 e 91, que D^- é um conjunto mensurável e que a diferença $\xi(\omega)$ supracitada é uma função boreliana. Sendo η a função inversa de ξ, o conjunto K^- formado pelos pontos ω em que as funções ξ_n deixam de ter limite será o conjunto dado pela relação (compare-se com os resultados do exemplo 90)

$$K^- = \eta(\{0 < \xi(\omega) \leqslant +\infty\})\varepsilon A.$$

Concluímos não só que é *mensurável o conjunto* K *formado pelos pontos* ω *em que as funções* ξ_n *têm limite,* como também que o corolário 63' e o teorema 48 obrigam a ser *boreliana toda a restrição de qualquer sublimite extremo dos* ξ_n *ao conjunto* K e, por isso, obrigam a ser *boreliana a função que sobre* K^- *vale* 0 *e que sobre* K *coincide com o limite dos* ξ_n. É interessante notar que *a falta de limite para uma sucessão formada por funções borelianas pode ser suprida* (em termos de borelianidade) *com uma facilidade muito maior do que poderia parecer à primeira vista.*

Exemplo 93. Vale a seguinte *propriedade:* «Uma função $x = \xi(\omega)$ é boreliana (finita ou em sentido lato) se e só se forem simultaneamente borelianas as suas partes positiva e negativa.» — Com efeito, trata-se duma consequência imediata das alíneas c) e f) do teorema 64 e da fórmula 92a) (onde a diferença nunca é indeterminada).

2. **Séries e produtos infinitos com termos borelianos**

Posto isso, retomemos os espaços mensuráveis do teorema 64. Dada uma *série* [ou dado um *produto infinito*], cujo termo genérico seja uma função real e *finita* $\xi_n(\omega)$ ($n = 1,2,3, \ldots$) definida em Ω, a soma [ou o produto] dos n primeiros termos terá, quando $n\uparrow+\infty$, o limite $\xi(\omega)$, finito ou $\pm\infty$ para cada ω, num certo conjunto $K \leqslant \Omega$. Nos casos em que K não for vazio, ficamos com uma *função real* $\xi(\omega)$ *de domínio* K, *a que vamos chamar função-valor* da série proposta [ou do produto infinito proposto]. Note-se que pusemos de lado os números $\pm\infty$ como valores dos termos, porque assim simplificamos o processo sem excluirmos a possibilidade de acesso a esses números através da função-valor.

Neste contexto, podemos enunciar o

Teorema 65. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega),A(A)]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{X}(x),\overline{B}(\overline{B})]$, então toda a série [ou todo o produto infinito] cujo termo genérico seja uma função boreliana e *finita* é tal que ou não há função-valor ou então há uma função-valor que terá domínio *mensurável* K, será boreliana se $K = \Omega$ e, se K propriamente contido em Ω, será extensível a uma função boreliana por atribuição do valor fixo 0 sobre K^-.»

Demonstração. Sejam $\xi_n(\omega)$ ($n = 1,2,3, \ldots$) os termos borelianos e finitos do enunciado. Caso haja função-valor $\xi(\omega)$ com *domínio* K (por natureza não-vazio), é óbvio que ξ é o limite, quando $n\uparrow+\infty$, da soma finita e determinada [ou do produto finito e determinado] das *n* primeiras funções ξ com índice, soma essa [ou produto esse] que é boreliana por f) [ou boreliano por e)] do teorema 64. Nesta conformidade, sabemos, pelo exemplo 92 devidamente adaptado, que K é mensurável em relação a (Ω,A) e sabemos também, pelo corolário 63', que é boreliano o sublimite mínimo $l(\omega)$ da soma [ou do produto] dos *n* primeiros ξ com índice. Ora, por um lado, qualquer restrição de $l(\omega)$ a K é boreliana, pelo teorema 48, e, por outro lado, a natureza da restrição é tal que ela coincide com $\xi(\omega)$ sobre K e pode valer 0 nos eventuais pontos $\omega\varepsilon K^-$, c. q. d.

Observação. O sublimite mínimo $l(\omega)$ referido na demonstração precedente, ou então o correspondente sublimite máximo $L(\omega)$, é sempre uma função definida em Ω que pode ser utilizada para tirar uma função boreliana de qualquer série [ou produto infinito] com termos borelianos e finitos.

Exemplo 94. Um caso particular da versão do teorema 65 relativa a séries é o caso das *séries de potências,* quer dizer o caso em que o termo genérico $\xi_n(\omega)$ $(n = 1,2,3, \ldots)$ é da forma $c_{n-1} \cdot [\xi(\omega) - c]^{n-1}$ (recorde-se a convenção $0^0 = 1$), com $\xi(\omega)$ a designar uma função boreliana e finita e com c e cada um dos c_{n-1} a designar uma constante real e finita. Com efeito, o teorema 65 é aplicável porque o termo genérico supracitado (obviamente finito) é boreliano, conforme se reconhece através de a) do teorema 59 e de f) e e) do teorema 64. Acresce que as séries de potências oferecem facilidades especiais através dos conhecidos intervalos de convergência (centrados em c). Se os c_{n-1} forem todos nulos a partir dum certo *n,* então fica um *polinómio inteiro igual à função-valor,* esta *finita e boreliana.*

3. Composição de funções contínuas e de funções de Baire com funções borelianas

Dada a função real $x' = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, com domínio K contido no produto X das $N < +\infty$ rectas reais $X_n (n = 1,2, \ldots, N)$ e com contradomínio K' contido na recta real X', não só sabemos que a função f é contínua em K se e só se ela for contínua em cada ponto $x \varepsilon K$, como também sabemos que a função f é contínua num ponto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N) \varepsilon K$ se e só se $\tilde{x}' = f(\tilde{x})$ for igual ao limite de $f(x)$ quando $x \varepsilon K$ tender para $\tilde{x}$ e, portanto, igual ao limite de $f(x)$ quando cada uma das coordenadas x_n de $x \varepsilon K$ tender para a coordenada homóloga $\tilde{x}_n$ de $\tilde{x}$ (*eventualmente por valores todos iguais a* $\tilde{x}_n$). Estas considerações podem transcrever-se para uma *continuidade a que podemos chamar alargada ou em sentido lato,* a qual se obtém substituindo no texto anterior os espaços reais X', X e X_n pelos seus homólogos alargados respectivamente $\overline{X}'$, $\overline{X}$ e $\overline{X}_n$, quer dizer consentindo os valores $-\infty$ e $+\infty$ para x' (e $\tilde{\mathrm{x}}$') e para cada $\mathrm{x_n}$ (e $\tilde{\mathrm{x}}_{\mathrm{n}}$). Claro que esta continuidade alargada inclui a continuidade vulgar na qualidade de caso particular.

Posto isso, vamos apresentar o

Teorema 66. «Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$, dado o espaço de Borel alargado a $\mathrm{N} < +\infty$ dimensões $\dot{\times}_{1\leqslant n\leqslant N} [\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x_n}), \overline{B}_{\mathrm{n}}(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{n}})] = [\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{x}), \overline{B}(\overline{\mathrm{B}})]$ e dada a recta de Borel alargada $[\overline{\mathrm{X}}'(x'), \overline{B}'(\overline{\mathrm{B}}')]$, considere-se um vector boreliano a N dimensões $\mathrm{x} = \xi(\omega)$, com contradomínio $\mathrm{E} \leqslant \overline{\mathrm{X}}$, e admita-se que $\mathrm{f}(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \ldots, \mathrm{x_N}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ é uma função contínua em sentido lato, com domínio igual a E e com contradomínio contido em $\overline{\mathrm{X}}'$. Então, sendo $\mathrm{x_n} = \xi_{\mathrm{n}}(\omega)$ $(\mathrm{n} = 1,2, \ldots, \mathrm{N})$ as coordenadas de x, a composição $\mathrm{f}(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_{\mathrm{N}}(\omega))$ resulta uma função boreliana com respeito a $(\overline{\mathrm{X}}', \overline{B}')$. Em estilo mais abreviado e menos preciso: É boreliana toda a função contínua dum vector boreliano.»

Demonstração. Seja qual for o valor de n entre 1 e N, extremos incluídos, o teorema 57 garante que $\xi_{\mathrm{n}}(\omega)$ é uma função boreliana, a qual terá uma função inversa η_{n} e será, de acordo com o teorema 61, o limite (uniforme) duma sucessão formada por funções e. b., digamos $\mathrm{x_{n,p}} = \xi_{\mathrm{n,p}}(\omega)$ $(\mathrm{p} = 1,2,3, \ldots)$ com domínio comum Ω, funções essas que poderiam ser as do último membro da fórmula 97), com p em lugar de n e com η_{n} e $\mathrm{x_n}$ em lugar de η e x, mas que aqui convém escolher iguais a

$$\begin{aligned}
&((-\infty) \cdot \mathrm{I}_{\eta_{\mathrm{n}}(\{-\infty\})}(\omega)) + \\
&+ \Big(\sum_{-\infty<k<+\infty} [y_{k,\mathrm{n,p}} \cdot \mathrm{I}_{\eta_{\mathrm{n}}(\{\frac{k}{2^{\mathrm{p}}} \leqslant \mathrm{x_n} < \frac{k+1}{2^{\mathrm{p}}}\})}(\omega)] \Big) + \\
&+ ((+\infty) \cdot \mathrm{I}_{\eta_{\mathrm{n}}(\{+\infty\})}(\omega)) \; (\mathrm{p} = 1,2,3, \ldots), \qquad (97')
\end{aligned}$$

onde k percorre a sucessão $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ e onde, fixados k, n e p, o factor $y_{k,\mathrm{n,p}}$ representa um número não só pertencente ao intervalo $\mathrm{J}_{k,\mathrm{p}} = \{\frac{k}{2^{\mathrm{p}}} \leqslant \mathrm{x_n} < \frac{k+1}{2^{\mathrm{p}}}\}$, como também obrigatoriamente igual a um valor fixo escolhido entre os valores assumidos por $\xi_n(\omega)$, sempre que tal for possível (quer dizer sempre que a indicatriz do transformado inverso $\eta_n(J_{k,p})$ for distinta da constante 0). Com efeito, escolhido arbitrariamente o valor de n, podemos adaptar a parte da demonstração do teorema 61 que é posterior à fórmula 97) do seguinte modo: retirando o papel especial reservado ao número 0 (que agora não nos preocupa como eventual causador de indeterminações); pondo 97'), $\overline{X}_n, x_n, \xi_n, \eta_n, M_n, E_n, U_n$, p e $\xi_{n,p}$ em lugar de respectivamente 97), $\overline{X}, x, \xi, \eta, M, E, U$, n e ξ_n; concluindo que é e. b. cada uma das funções $\xi_{n,p}$, que vale uniformemente em $\omega\varepsilon U_n \neq O_\Omega$ a relação $|\xi_n(\omega) - \xi_{n,p}(\omega)| < 1/2^p \downarrow 0$ (quando $p\uparrow +\infty$) e que a função ξ_n é limite uniforme das funções e. b. $\xi_{n,p}$. Logo a continuidade de f dá

$$f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_N(\omega)) =$$

$$= f(\lim_{p\uparrow+\infty} \xi_{1,p}(\omega), \lim_{p\uparrow+\infty} \xi_{2,p}(\omega), \dots, \lim_{p\uparrow+\infty} \xi_{N,p}(\omega)) =$$

$$= \lim_{p\uparrow+\infty} f(\xi_{1,p}(\omega), \xi_{2,p}(\omega), \dots, \xi_{N,p}(\omega)),$$

onde, seja qual for p, o argumento do último limite é uma função e. b., isto pelo teorema 58 se $N > 1$ e pelo exemplo 83 se $N = 1$. Em face disso, o corolário 63" permite terminar a nossa demonstração.

Embora existam várias definições do conceito de *função de Baire,* convencionemos atribuir esta designação a qualquer função que seja o limite duma sucessão formada por funções contínuas em sentido lato, todas com o mesmo domínio contido em $\overline{X}$ e cada uma com contradomínio contido em $\overline{X}'$. Em particular, é função de Baire toda a função contínua em sentido lato com domínio contido em $\overline{X}$ e com contradomínio contido em $\overline{X}'$, isto porque uma tal função coincide com o limite duma sucessão cujos termos são todos iguais à própria função. Por outro lado, existem funções de Baire *descontínuas,* conforme se pode ver através do caso seguinte:

$(\overline{X}, \overline{B})$ é uma recta de Borel alargada; cada uma das funções $|x|^p$ $(p = 1,2,3, \dots)$ é uma função contínua em sentido lato, com domínio igual a $\overline{X}$; $\lim_{p\uparrow+\infty} |x|^p$ vale 0, 1 ou $+\infty$ respectivamente para $|x| < 1$, $|x| = 1$ ou $|x| > 1$. Note-se que os dois últimos limites falham se substituirmos $|x|^p$ por x^p e se em seguida supusermos $x \leqslant -1$.

Posto isso, apresentemos o

Corolário 66'. «Dados os espaços mensuráveis do teorema 66, é boreliana toda a função de Baire tomada num vector boreliano.»

Demonstração. Seja $E \leqslant \overline{X}$ o contradomínio do vector boreliano referido no enunciado. Ora, se considerarmos a nossa função de Baire como função definida em E, ela será aí o limite duma sucessão formada por funções contínuas. Logo, se considerarmos a composição da nossa função de Baire com o vector boreliano em causa, ela será o limite duma sucessão formada por composições de funções contínuas com o dito vector boreliano, composições essas todas borelianas em virtude do teorema 66. Nesta conformidade, o corolário 63'' permite terminar a nossa demonstração.

Observação. Seja qual for o (contra)domínio $E \leqslant \overline{X}$, podemos chamar: *funções de Baire da classe* 0 às funções contínuas do tipo f usado no teorema 66; *funções de Baire da classe* 1 àquelas funções de Baire acima definidas que sejam descontínuas (quer dizer que não sejam da classe 0); *funções de Baire da classe* 2 às funções que não sejam de Baire de classe $\leqslant 1$ e que possam obter-se a partir das funções de Baire da classe 1 por uma passagem ao limite, decalcada da que nos levou das suas homónimas da classe 0 para as suas homónimas da classe 1; etc.. Então, seja qual for o inteiro $k \geqslant 0$, o corolário 66' e eventuais aplicações consecutivas do corolário 63'' mostram que *é boreliana toda a função de Baire que tenha a classe k e que seja tomada num vector boreliano.*

Exercício 94. Examine as diversas alíneas do teorema 64 e assinale os casos em que a borelianidade a provar incide sobre uma função contínua (em sentido lato), tomada num vector boreliano, e, por isso, se reduz a uma aplicação imediata do teorema 66.

Exercício 95. Proposta uma função boreliana do tipo referido no corolário 62', forme sucessões de funções s. b. que tendam para a função dada e que se encontrem impossibilitadas de assumir algum dos valores $-\infty$, 0 e $+\infty$. Utilize o processo para estender o teorema 64 a casos de indeterminação, por uma via diferente da usada no exemplo 91, recorrendo, para o efeito, a associações de aproximação isentas de indeterminações e aos eventuais limites de tais associações. O novo processo será melhor do que o anterior?

4. Casos particulares notáveis

Retomados os espaços mensuráveis (Ω,A), $(\overline{X},\overline{B})$ e $(\overline{X}',\overline{B}')$ do teorema 66, vamos particularizar supondo que (Ω,A) é um espaço mensurável resultante da restrição de $(\overline{X},\overline{B})$ a algum boreliano. Neste contexto, temos o

Teorema 67. «Dada a recta de Borel alargada $[\overline{X}'(x'), \overline{B}'(\overline{B}')]$ e dado o espaço de Borel alargado a $N < +\infty$ dimensões $[\overline{X}(x), \overline{B}(\overline{B})]$, com ponto genérico x de coordenadas x_n $(n = 1,2,\dots,N)$, resulta boreliana qualquer função $f(x_1,x_2,\dots,x_N) = f(x)$ que seja a restrição a um boreliano $\overline{B} \leqslant \overline{X}$ duma função definida em $\overline{X}$, que tenha contradomínio contido em $\overline{X}'$ e que seja contínua em sentido lato [ou dalguma classe de Baire].»

Demonstração. Comecemos por recordar a definição de restrição duma função definida em $\overline{X}$ a um conjunto $\overline{K} \leqslant \overline{X}$, igual à função considerada sobre $\overline{K}$ e igual digamos a 0 nos eventuais pontos $x \varepsilon \overline{K}^-$. Ora, igualado o espaço mensurável $(\overline{X},\overline{B})$ do enunciado ao espaço mensurável (Ω,A) do teorema 66, *a função idêntica* $x = \omega$ *é um vector boreliano a* $N \geqslant 1$ *dimensões* com contradomínio $\overline{X}$, isto porque a correspondente transformação inversa conserva todos os conjuntos contidos em $\overline{X}$ e, por isso, conserva os borelianos contidos em $\overline{X}$. Daí e do teorema 66 [ou do corolário 66' e da observação anexa] resulta a tese no caso particular de se ter $\overline{B} = \overline{X}$. Por fim, o caso $\overline{B}$ propriamente contido em $\overline{X}$ arruma-se recorrendo ao teorema 48, c. q. d.

Exemplo 95. Retomemos as hipóteses do teorema 67 mudando, porém, f para uma função *definida num intervalo* J (*a* N *dimensões*) *não-vazio, limitado e fechado onde* f *seja uma função limi-*

tada e integrável no sentido de Riemann. Vamos chamar *extensão nula de* f *a* $\overline{X}$ e vamos designar por F a nova função que coincide com f em J e que toma o valor 0 em todos os pontos de J^-. Claro que F é uma função limitada em $\overline{X}$ a qual, escolhido arbitrariamente um intervalo fechado $\overline{J} \leqslant \overline{X}$, resulta integrável no sentido de Riemann em $\overline{J}$, tendo o respectivo integral (N-múltiplo) um valor finito e igual ao valor do integral de F sobre o intervalo fechado $J \wedge \overline{J}$. † — Ora, seja qual for n tal que $1 \leqslant n \leqslant N$, vamos redesignar por y_n a coordenada (variável) x_n nos casos em que ela aparecer em duas versões distintas. Então, não só podemos pôr

$$J = \underset{1 \leqslant n \leqslant N}{\times} \{a_n \leqslant y_n \leqslant b_n\}, \tag{103}$$

$$\text{com } -\infty < a_n \leqslant b_n < +\infty \text{ para cada n,}$$

como também estamos a admitir que existe e logo é finito o integral de Riemann N-múltiplo e *definido* (quer dizer com intervalo de integração fixo e a N dimensões)

$$\int_J F(y_1, y_2, \ldots, y_N)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_N = \int_J F(y) dy \tag{104}$$

(cujo valor pomos igual a 0 caso se tenha $a_n = b_n$ para algum n). Se fixarmos apenas o ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ (de coordenadas todas finitas) e se substituirmos, seja qual for n, o intervalo linear fixo $\{a_n \leqslant y_n \leqslant b_n\}$ pelo intervalo variável $\{\inf(a_n, x_n) \leqslant y_n \leqslant \sup(a_n, x_n)\}$, com x_n a percorrer a respectiva recta de Borel alargada $\overline{X}_n$, então correspondem o intervalo (a N dimensões) variável

$$J_x = J_{x_1, x_2, \ldots, x_N} = \underset{1 \leqslant n \leqslant N}{\times} \{\inf(a_n, x_n) \leqslant y_n \leqslant \sup(a_n, x_n)\} \tag{103'}$$

e a função de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ finita e dada por

$$\int_{J_{x_1, x_2, \ldots, x_N}} F(y_1, y_2, \ldots, y_N)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_N = \int_{J_x} F(y) dy, \tag{104'}$$

---

† A este propósito pode consultar-se o exemplo 16, onde a intersecção será fechada por serem fechados os dois conjuntos secantes.

um integral de Riemann N-múltiplo e *indefinido* (quer dizer com intervalo de integração dependente de x e a N dimensões). Este integral é uma função contínua de x com domínio igual a $\overline{X}$, isto pela teoria clássica do integral de Riemann (N-múltiplo). Logo o teorema 67 na versão $\overline{B} = \overline{X}$ conduz à seguinte *propriedade*:

«Proposta uma função f limitada e integrável no sentido de Riemann sobre um intervalo a $N < +\infty$ dimensões, dado pela fórmula 103), basta fixar o ponto de coordenadas a_n para que a extensão nula F de f ao respectivo espaço real alargado conduza a um integral indefinido que não só é boreliano, como também é dado pelas fórmulas 103') e 104').»

Exemplo 96. Vale a seguinte *propriedade:* «E dada a recta de Borel alargada $[\overline{X}'(x'), \overline{\mathcal{B}}'(\overline{B}')]$ e é dado o espaço de Borel alargado a $N < +\infty$ dimensões $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$, com ponto genérico x de coordenadas $x_n (n = 1,2, \ldots, N)$. Então, escolhido arbitrariamente um boreliano não-vazio $\overline{\beta} \leqslant \overline{X}$, resulta boreliana qualquer função $F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = F(x) = x'$ que tome o valor 0 nos pontos $x \varepsilon \overline{\beta}^-$ e que seja contínua em sentido lato [ou dalguma classe de Baire] sobre $\overline{\beta}$.» — Com efeito, igualado o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ à restrição $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})/\overline{\beta}$, então a função idêntica $x = \omega = \xi(\omega)$, certamente mensurável, resulta um vector com respeito a $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$, cujo contradomínio será $\overline{\beta}$ e que será boreliano (veja-se o lema 47_0). Daí e do teorema 66 [ou do corolário 66' e da observação anexa] concluímos que a função F(x), tomada em $\overline{\beta}$, será uma função f(x) contínua em sentido lato [ou dalguma classe de Baire], que resulta boreliana quando se parte de $(\overline{X}/\overline{\beta}, \overline{\mathcal{B}}/\overline{\beta})$. Como todo o conjunto $\overline{B}/\overline{\beta} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}/\overline{\beta}$ pode ser reinterpretado como boreliano $\overline{B} \triangle \overline{\beta} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}$, concluímos que a função F(x), tomada em $\overline{X}/\overline{\beta}$ ou melhor em $\overline{\beta} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}$, será uma função mensurável quando se parte de $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$, pelo que o teorema 45 obriga a função F(x) referida no enunciado, tomada em $\overline{X}$, a ser efectivamente boreliana, subentende-se quando se parte de $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$. — Talvez valha a pena acrescentar que a propriedade supracitada cobre os casos correntes na Análise clássica, quer dizer os casos em que $\overline{\beta} \leqslant X$ propriamente contido em $\overline{X}$ e em que um dos conjuntos $\overline{\beta}$ e $X - \overline{\beta}$ é ou intransnumerável ou aberto ou fechado ou resultante dum número finito (e diminuto) de conjuntos dos tipos mencionados por meio de operações internas (uniões, intersecções e subtracções), em qualquer dos casos um boreliano de $\overline{B}$ (veja-se o n.º **3** do § 20).

Observação. Caso a subfunção de F (do exemplo 96) com domínio $\overline{\beta}$ admita uma extensão $\overline{F}$ a $\overline{X}$ que seja contínua em sentido lato [ou de alguma classe de Baire], então a própria função F (tomada em $\overline{X}$) será uma restrição de $\overline{F}$ a $\overline{\beta}$, pelo que a propriedade em causa passa a ser uma consequência imediata do teorema 67. Que esta simplificação nem sempre se encontra acessível, é um facto que o leitor pode constatar estudando o exercício 96 proposto a seguir.

Exercício 96. Dadas as rectas de Borel alargadas $(\overline{X},\overline{B})$ e $(\overline{X}',\overline{B}')$, mostre que a função x' = sen (1/x) tem o domínio $\overline{X}-\{0\}$ e é uma função tal que todas as suas extensões a $\overline{X}$ resultam descontínuas e borelianas.

Exercício 97. Dado o espaço de Borel alargado $(\overline{X},\overline{B})$ a $N<+\infty$ dimensões e dada a recta de Borel alargada $(\overline{X}',\overline{B}')$, considere, por um lado, um intervalo fechado $\overline{J}$ propriamente contido em $\overline{X}$ com interior J não-vazio e suponha, por outro lado, que x' = f(x) é uma função contínua em sentido lato com domínio K tal que $J \leqslant K \leqslant \overline{J}$. Mostre que a existência dum limite (eventualmente igual a $\pm\infty$) da função f em cada ponto $x \varepsilon \overline{J}-K$ possibilita duas extensões consecutivas de f, ambas contínuas, a primeira a $\overline{J}$ e, a partir desta, outra a $\overline{X}$. Haverá unicidade para cada uma das extensões referidas?

5. **Derivação e borelianidade**

Conservando a linha genérica estabelecida no n.º **4**, vamos particularizar mais uma vez, admitindo que o espaço de Borel $(\overline{X},\overline{B})$ tem dimensionalidade N = 1 e, portanto, é uma recta de Borel alargada. Neste contexto, vamos apresentar o

Teorema 68. «Dadas as rectas de Borel alargadas $[\overline{X}(x),\overline{B}(\overline{B})]$ e $[\overline{Y}(y),\overline{C}(\overline{C})]$, seja $y = f(x)$ uma função finita e mensurável num intervalo J não-vazio, limitado à esquerda [ou à direita] e da forma $\{a \leqslant x < b\}$ [ou $\{a < x \leqslant b\}$]. Caso exista em J a função $y'_d = f'_d(x)$ [ou $y'_e = f'_e(x)$], a semiderivada à direita [ou à esquerda] de y com contradomínio contido em $\overline{Y}$, então resulta boreliana a função que é igual a y'_d [ou y'_e] nos pontos $x \varepsilon J$ e que é igual a 0 nos pontos $x \varepsilon J^-$.»

Demonstração. Antes de mais nada, chamamos a atenção para a redesignação da recta de Borel $[\overline{X}'(x),\overline{B}'(\overline{B}')]$ do n.º **4** pela expressão $[\overline{Y}(y),\overline{C}(\overline{C})]$, posta no enunciado pela conveniência de evitar confusões com o simbolismo clássico relativo à derivação. Por outro lado, vale $-\infty < a$ [ou $b < +\infty$] (não há lugar para semiderivadas nos pontos $\pm\infty$), supõe-se y finito (apenas se derivam funções finitas) e, além disso, só se consideram semiderivadas com contradomínio contido em $\overline{Y}$ (estão fora de causa limites de razões incrementais que sejam infinitos sem sinal declarado).

Posto isso, considerem-se números $h_p (p = 1,2,3, \ldots)$ positivos [ou negativos] com limite igual a 0 quando $p \uparrow +\infty$. Se ampliarmos f(x) para uma função boreliana definida em $\overline{X}$ mediante a convenção $f(x) = 0$ nos pontos $x \varepsilon J^-$ (veja-se o teorema 45), então, seja qual for o valor de p, a função $g_p(x) = f(x + h_p)$ tem o domínio $\overline{X}$ e resulta boreliana, por ser a composição da função contínua $x + h_p$ com a função boreliana f (vejam-se o teorema 67 e o corolário 47'). Logo, seja qual for p, a razão incremental (lateral)

$$R_p(x) = [g_p(x) - f(x)]/h_p$$

será finita e definida em $\overline{X}$ e, portanto, resulta boreliana pela alínea f) do teorema 64. Quando $p \uparrow +\infty$, então $R_p(x)$ não só tende para a função referida na respectiva versão da parte final do enunciado, como também tende para uma função boreliana de acordo com o corolário 63", c. q. d.

Uma consequência fácil do teorema 68 é o

Corolário 68'. «O teorema 68 permanece válido em ambas as versões se, por um lado, J significar um intervalo não-vazio e aberto arbitrário e se, por outro lado, mantivermos toda a parte restante do enunciado.»

Demonstração. Sendo J um intervalo não-vazio da forma $\{a < x < b\}$, podemos introduzir números h_p positivos [ou negativos], com limite igual a 0 quando $p \uparrow +\infty$, e podemos acompanhar a demonstração do teorema 68 até chegarmos à razão incremental $R_p(x)$, finita e boreliana para cada p. Quando $p \uparrow +\infty$, o corolário 63' garante a borelianidade de $\overline{\lim\limits_{p \uparrow +\infty}} R_p(x)$, sublimite máximo esse que coincide com a função referida na correspondente versão da parte final do enunciado, isso em todos os pontos com possível excepção de a [ou b]. Como $\{a\} \varepsilon \overline{B}$ [ou $\{b\} \varepsilon \overline{B}$], a parte complementar do teorema 45 permite terminar a nossa demonstração.

O assunto em estudo fica arredondado através do

Corolário 68". «Dadas as rectas de Borel alargadas do teorema 68, seja $y = f(x)$ uma função finita e mensurável num intervalo I, não-degenerado e isento dos pontos $x = \pm \infty$. Caso exista em I a função $y' = f'(x)$, a derivada de y com contradomínio contido em $\overline{Y}$, então resulta boreliana a função que é igual a y' nos pontos $x \varepsilon I$ e que é igual a 0 nos pontos $x \varepsilon I^-$.»

Demonstração. Caso se verifique a hipótese do enunciado, sabemos, da *definição de (função) derivada* num intervalo não-degenerado, que y' é o valor comum de y'_d e y'_e nos pontos interiores a I, além de ser a semiderivada do lado do intervalo nos pontos extremos pertencentes a I. Nesta conformidade, vamos designar: por $\varphi(x)$ a função definida na parte final do nosso enunciado; por $\varphi_d(x)$ a sua homóloga boreliana que corresponde a $I - \{b\}$ pela primeira versão do teorema 68 ou do corolário 68'; por $\varphi_e(x)$ a homóloga boreliana de $\varphi(x)$ que corresponde a $I - \{a\}$ pela versão alternativa do teorema 68 ou do corolário 68'; por $\psi(x)$ a indicatriz do interior de I, esta boreliana pela alínea b) do teorema 59. Logo se reconhece que, seja qual for $x \varepsilon \overline{X}$, se verifica a igualdade

$$\varphi(x) = [\varphi_d(x) + \varphi_e(x)] \cdot [1 - \psi(x)/2],$$

pelo que a parte final do teorema 45 e as alíneas f) e e) do teorema 64 provam a borelianidade de $\varphi(x)$, quer dizer a tese do nosso corolário.

Exemplo 97. Suponhamos que a recta de Borel $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$ do estudo precedente coincide com o factor de índice fixo τ dum espaço de Borel multidimensional e alargado $\dot{\times}_{t\epsilon T} [\overline{X}_t(x_t), \overline{\mathcal{B}}_t(\overline{B}_t)]$. Seja $y = f((x_t, t\epsilon T)) = f(x_t, t\epsilon T)$ uma função com domínio não-vazio e com contradomínio contido em $\overline{Y}$. Podemos passar para a «função parcial» $f_\tau(x_\tau)$ †, que resulta de f se igualarmos x_t a uma constante admissível para cada $t \neq \tau$ e se, feito isso, conservarmos a variabilidade de x_τ nas condições admissíveis. A função f_τ assim obtida pode ser sujeita à mesma análise a que se sujeitou f no teorema 68 e nos seus corolários. Assim somos levados a (semi) derivadas de f_τ (que não serão senão *derivadas parciais de* f *em ordem a* x_τ), tomadas em intervalos e com ampliações borelianas definidas em $\overline{X}_\tau$, essas conseguidas em cada caso pela atribuição do valor 0 nos pontos pertencentes ao complemento do respectivo intervalo de definição. Talvez valha a pena insistir em que essas derivadas parciais com ampliações borelianas exigem a fixação prévia de todas as coordenadas x_t de índice $t \neq \tau$.

Exercício 98. Dadas as rectas de Borel alargadas $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$ e $(\overline{Y}, \overline{\mathcal{C}})$, suponha que a função $y = f(x)$ é *derivável* (quer dizer admite derivada finita) no intervalo significativo J. Nesta conformidade, mostre que a derivada $y' = f'(x)$ é uma função de Baire de classe $k \leqslant 1$, desde que ela seja tomada em qualquer intervalo interior a J. A propriedade subsiste se pusermos J em lugar dum intervalo interior a J?

6. **Monotonicidade e borelianidade**

Dado um intervalo significativo $\overline{J}$ extraído da recta de Borel alargada $(\overline{X}, \overline{\mathcal{B}})$, então uma função real f(x) definida em $\overline{J}$ é classificada como sendo *crescente* [ou *decrescente*] em $\overline{J}$ se e só se, escolhidos arbitrariamente dois pontos x' e x'' > x' pertencentes a $\overline{J}$, tiver lugar a desigualdade $f(x') \leqslant f(x'')$ [ou $\geqslant f(x'')$]. A função

† Não há risco de confusão com alguma coordenada de índice τ para f, já que f tem contradomínio contido na recta real $\overline{Y}$.

diz-se *monotónica* (por vezes *monótona*) em $\overline{J}$ se e só se ela for aí uma função ou crescente ou decrescente. Para melhor compreensão do que segue, podemos acrescentar que não representa nenhuma perda de generalidade a hipótese de $\overline{J}$ ser um intervalo fechado de pontos extremos a e b, com $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$: com efeito, a teoria geral das funções crescentes [ou decrescentes] ensina que $x\downarrow a$ faz decrescer [ou crescer] f(x) para $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = f(a^+)$, pelo que ou $a \varepsilon \overline{J}$ e $f(a^+) \geqslant f(a)$ [ou $\leqslant f(a)$] ou $a \varepsilon \overline{J}^-$ e pode incorporar-se em $\overline{J}$ mediante a convenção $f(a) = f(a^+)$, isto sem prejuízo do crescimento [ou decrescimento]; por outro lado, a teoria geral supracitada ensina que $x\uparrow b$ faz crescer [ou decrescer] f(x) para $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = f(b^-)$, pelo que ou $b \varepsilon \overline{J}$ e $f(b^-) \leqslant f(b)$ [ou $\geqslant f(b)$] ou $b \varepsilon \overline{J}^-$ e pode incorporar-se em $\overline{J}$ mediante a convenção $f(b) = f(b^-)$, isto sem prejuízo do crescimento [ou decrescimento]. Indo mais longe, nem sequer representa perda de generalidade a hipótese de o intervalo fechado $\overline{J}$ ser igual à recta $\overline{X}$: com efeito, se $a > -\infty$, podemos pôr $f(x) = f(a)$ para $x < a$ e, se $b < +\infty$, podemos pôr $f(x) = f(b)$ para $x > b$, em ambos os casos sem prejuízo do crescimento [ou decrescimento].

Posto isso, apresentamos o

Teorema 69. «Dadas as rectas de Borel alargadas $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})]$ e $[\overline{Y}(y), \overline{\mathcal{C}}(\overline{C})]$, seja $y = f(x)$ uma função monotónica, com domínio igual a $\overline{X}$ e com contradomínio contido em $\overline{Y}$. Então, resulta boreliana a restrição de f(x) a qualquer conjunto $\overline{B} \leqslant \overline{X}$.»

Demonstração. Para começar, o teorema 48 mostra que basta provar a borelianidade de qualquer função $y = f(x)$ monotónica em $\overline{X}$. Por outro lado, f(x) é crescente [ou decrescente] se e só se $-f(x)$ for decrescente [ou crescente]; além disso, o lema 62_1 ou a alínea f) do teorema 64 faz com que a função f(x) seja boreliana se e só se for boreliana a sua simétrica $-f(x)$; portanto, basta provar que é boreliana toda a função $y = f(x)$ crescente em $\overline{X}$.

Ora vimos, a propósito da demonstração do lema 62_1, que é geradora de $\overline{\mathcal{C}}$ a classe formada pelos borelianos $\{y = -\infty\} = K_{-\infty}$ e $\{-\infty < y < c\} = K_c$, com c finito e arbitrário. Se admitirmos o crescimento de f em $\overline{\mathrm{X}}$ e se designarmos por g a função inversa de f na acepção da fórmula 70), então, ecolhido um c tal que $-\infty \leqslant c < +\infty$: ou se tem $g(K_c) = O_{\overline{X}} \varepsilon \overline{B}$ ou se tem $g(K_c) \neq O_{\overline{X}}$, vamos igualar a x_c o supremo dos x tais que $x \varepsilon g(K_c)$, qualquer $x < x_c$ pertencerá a $g(K_c)$ (por ter à sua direita pontos de $g(K_c)$) e assim concluímos que $g(K_c)$ é um intervalo, de extremos $-\infty$ e x_c, e logo é um boreliano $\overline{\mathrm{B}}$. Nesta conformidade, o teorema 46 prova a borelianidade de f(x), c. q. d.

Dado o intervalo $J = \{a \leqslant x \leqslant b\}$, com $-\infty < a < b < +\infty$, a função real f(x), definida em J, diz-se aí de *variação limitada* (há quem diga de *oscilação limitada*) se e só se for finito o supremo de

$$V = V_{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}} = \sum_{1 \leqslant p \leqslant P} |f(x_p) - f(x_{p-1})| \tag{105}$$

em relação a todos os números naturais $P > 1$ e a todos os números reais $x_0, x_1, \ldots, x_p$ tais que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$. Claro que uma tal função é forçosamente *finita* e que V cresce quando se intercala um ponto de J entre algum x_p e o seu antecessor. Por um lado, V degenera na constante $f(b) - f(a)$ [ou $f(a) - f(b)$] se f for uma função crescente [ou decrescente] em J e, por outro lado, a Análise clássica ensina que uma função real é de variação limitada em J *se e só se ela for aí igual à diferença entre duas funções finitas e crescentes* (designadas por funções crescentes nos textos em que se consideram apenas funções com valores finitos). Ora uma função $\varphi(x)$ finita e crescente em J é aí limitada, em virtude da relação $-\infty < \varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(b) < +\infty$, facto esse que nos faz concluir que *é limitada em* J *qualquer função que seja aí de variação limitada.* Por outro lado, dado J, é finita e crescente a soma de duas funções finitas e crescentes e, portanto, *é de variação limitada a soma de duas funções de variação limitada.*

Postos estes preliminares, temos o

Corolário 69'. «Dadas as rectas de Borel alargadas do teorema 69 e dado o intervalo J significativo, fechado e limitado, então é boreliana qualquer função $y = f(x)$ que tenha contradomínio contido em $\overline{\mathrm{Y}}$, que seja de variação limitada em J e que assuma o valor 0 em todos os pontos $x \varepsilon J^-$.»

Demonstração. Seja qual for $x \varepsilon J$, podemos pôr $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, onde φ e ψ representam duas funções finitas e crescentes em J. Se pusermos $J = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ e se convencionarmos $\varphi(x) = \psi(x) = \min\ [\varphi(a), \psi(a)]$ para $x < a$ e $\varphi(x) = \psi(x) = \max\ [\varphi(b), \psi(b)]$ para $x > b$, então as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, assim estendidas a $\overline{X}$, não só resultam ambas finitas e crescentes, como também ficam com uma diferença igual à função $f(x)$ do enunciado. Então, o teorema 69 aplicado a φ e também a ψ (em $\overline{B} = \overline{X}$) e a alínea f) do teorema 64 (no caso da diferença) são incidências que permitem terminar a nossa demonstração.

Exemplo 98. Dadas as rectas de Borel alargadas do teorema 69, redesignemos por u a variável x nos casos em que ela aparecer numa segunda versão, consideremos o intervalo significativo e limitado $J = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ e suponhamos que $F(x)$ é uma função *finita e crescente em* J, a qual tem um contradomínio contido em $\overline{Y}$, para a qual introduzimos as convenções

$$F(a^-) = F(a), F(b^+) = F(b),$$

$$F(x^-) = \lim_{u \uparrow x} F(u) \quad \text{se} \quad x \varepsilon J - \{a\},$$

$$F(x^+) = \lim_{u \downarrow x} F(u) \quad \text{se} \quad x \varepsilon J - \{b\}$$

e em relação à qual é bem conhecido que os pontos $x \varepsilon J$ em que $F(x^-) < F(x^+)$ se constituem em conjunto intransnumerável, coincidente com o conjunto formado pelos pontos de descontinuidade de F. Posto isso, seja $f(x)$ uma *função limitada em* J (com contradomínio contido em $\overline{Y}$), *integrável no sentido de Riemann-Stieltjes no intervalo principal* $J - \{b\} = \{a \leqslant x < b\}$ *e com respeito à função integrante* $F(x)$, quer dizer tal que *existe* (e é finito) *o integral de Riemann-Stieltjes*

$$\int_{\{a \leqslant u < b\}} f(u)dF(u) = \underset{\delta_P \to 0}{\text{l.i.m.}} \Big(\sum_{1 \leqslant p \leqslant P} \{y_p \cdot [F(x_p^-) - F(x_{p-1}^-)]\} \Big), \tag{106}$$

onde P representa um número natural arbitrário > 1, onde $x_0 = a$ e $x_P = b$, onde $x_1, x_2, \dots, x_{P-1}$ são pontos de divisão de J (arbitrários desde que dispostos por ordem estritamente crescente), onde $\delta_P = \sup\limits_{1 \leqslant p \leqslant P} (x_p - x_{p-1})$ é o chamado *diâmetro da decomposição de*

$\{a \leqslant x < b\}$ nos P intervalos parciais $J_p = \{x_{p-1} \leqslant x < x_p\}$ (estes consecutivos e **disjuntos** *dois a dois*), onde cada y_p representa um número arbitrário desde que compreendido entre o ínfimo e o supremo de f no intervalo J_p com o mesmo índice, onde se supõe que os somatórios (formados nas condições referidas) se constituem em sucessão em relação a P ao longo da qual cada decomposição de $J-\{b\}$ resulta da anterior pela inserção dum novo ponto de divisão e (além disso) o diâmetro δ_P (certamente positivo e decrescente) tende para 0 (além de P tender crescentemente para $+\infty$) e onde, por fim, o símbolo l.i.m. refere que se trata dum limite que deve ser sempre o mesmo para todas as sucessões de somatórios admissíveis em face do enquadramento estabelecido. Então, se convencionarmos primeiro

$$\int_{\{x\}} f(u)\, dF(u) = f(x) \cdot [F(x^+)-F(x^-)], \tag{106'}$$

para qualquer $x \varepsilon J$, e em seguida que, caso exista o integral estendido a um intervalo principal G propriamente contido em J, ele se transforma no integral estendido ao fecho [ou interior] de G se lhe somarmos [ou subtrairmos] o integral obtido de 106') quando aí se iguala x ao ponto extremo de G que pertencer a G^- [ou a G], se fizermos isso, então obtemos *um dos tratamentos possíveis do integral de Riemann-Stieltjes* para o qual, perante as hipóteses e as convenções estabelecidas, a Análise clássica garante a existência dum integral *finito* em qualquer intervalo não-vazio $K \leqslant J$, garante a aditividade do integral com respeito a decomposições do intervalo de integração num número finito de intervalos parciais (disjuntos dois a dois e nem todos necessariamente significativos), garante a identificação do integral com o seu homólogo de Riemann sempre que $F(x) = x$ e for fechado o intervalo de integração e, por fim, garante que, sendo $L = \{\alpha \leqslant u \leqslant \beta\}$ o fecho de $K \leqslant J$, vale a desigualdade

$$\left| \int_K f(u)\, dF(u) \right| \leqslant \{\sup_{u \varepsilon L} |f(u)|\} \cdot \tag{107}$$

$$\cdot \{[F(\beta^-)-F(\alpha^+)] + [F(\alpha^+)-F(\alpha^-)] + [F(\beta^+)-F(\beta^-)]\}.$$

Note-se que $\beta \varepsilon K^-$ [ou $\alpha \varepsilon K^-$] permite suprimir a última [ou penúltima] diferença do segundo membro de 107), quer dizer o *salto da função* F *no ponto* β [ou α], e note-se também que a classificação de *integrável* para a função f com respeito a F encontra «a posteriori» a sua justificação perante a impossibilidade de o integral existir sem ser finito. Talvez valha a pena acrescentar que, proposta uma série convergente com termo genérico igual ao número real $v_p(p = 1,2,3, \dots)$, eventualmente uma soma vulgar se $v_p = 0$ dum certo p por diante, então $v_p \to 0$ quando $p \to +\infty$ e o valor da série será dado pela fórmula

$$\sum_{1 \leqslant p < +\infty} v_p = \lim_{P \uparrow +\infty} [\sum_{1 \leqslant p \leqslant P} (s_p \cdot |v_p|)], \tag{106''}$$

onde $s_p = +1$ se $v_p > 0$ e $s_p = -1$ se $v_p < 0$ e onde se torna notória a possibilidade de enquadramento do segundo membro no membro homólogo de 106) (cujo estudo será aprofundado por altura da teoria geral dos integrais, não necessariamente de Riemann-Stieltjes).

Posto isso, seja qual for o intervalo $J(x) = \{a \leqslant u < x\}$, com $x \varepsilon J$, não só as hipóteses e as convenções estabelecidas, como também a nova convenção de igualar a 0 o integral de f sobre o conjunto vazio e com respeito a F, tudo isso faz corresponder a cada $x \varepsilon J$ um integral finito $S(x)$ de f em $J(x)$ e com respeito a F, o qual se considera *definido* para uma determinada escolha de x e se considera *indefinido* para um x variável em J. O *integral indefinido* $S(x)$ é uma função (com domínio J) que faz corresponder a qualquer colecção de 3 ou mais números $u_q(q = 0,1, \dots, Q < +\infty)$ tais que $a = u_0 < u_1 < \dots < u_{Q-1} < u_Q = b$, dizíamos faz corresponder os intervalos $\{u_{q-1} \leqslant u < u_q\} = U_q(q = 1,2, \dots, Q)$ e os integrais

$$S(u_q) = \int_{J(u_q)} f(u)\, dF(u)\ (q = 0,1, \dots, Q), \text{ com } S(u_0) = 0,$$

pelo que a aditividade dos integrais com respeito aos intervalos de integração e a fórmula 107) na versão relativa a intervalos principais conduzem, via 105), a

$$V = V_{u_1, u_2, \dots, u_{Q-1}} = \sum_{1 \leqslant q \leqslant Q} |S(u_q) - S(u_{q-1})| = \sum_{1 \leqslant q \leqslant Q} \left| \int_{U_q} f(u)\, dF(u) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant q \leqslant Q} \{[\sup_{u \varepsilon U_q + \{u_q\}} |f(u)|] \cdot [F(u_q^-) - F(u_{q-1}^-)]\} \leqslant$$

$$\leqslant [\sup_{u \varepsilon J} |f(u)|] \cdot [F(b^-) - F(a)] < +\infty.$$

Logo é finito o supremo de *V* em relação aos números naturais $Q > 1$ e aos números reais $u_q (q = 0,1, \dots, Q)$, donde concluímos que *o integral indefinido* $S(x)$ *é uma função de variação limitada em* J. Daí e do corolário 69' tiramos a seguinte *propriedade:*

«Dadas as rectas de Borel alargadas do teorema 69, dado o intervalo significativo e limitado $J = \{a \leqslant x \leqslant b\}$, dada a função $F(x)$ finita e crescente em J e com contradomínio contido em $\overline{Y}$ e, por fim, dada ainda a função $f(x)$ com valores em $\overline{Y}$, limitada em J e integrável no sentido de Riemann-Stieltjes em $J - \{b\}$ com respeito a $F(x)$, com todos esses dados, resulta boreliana a função que toma o valor 0 em todos os pontos $x \epsilon J^-$ e que coincide em J com o integral indefinido de f no intervalo principal de extremos a e x, isto no caso de se tomar a função integrante $F(x)$.»

Podemos acrescentar que *a propriedade precedente subsiste se mudarmos o intervalo principal de extremos* a *e* x *para o intervalo fechado de extremos* a *e* x. Atendendo ao corolário 69', basta provar que é de variação limitada em J o novo integral indefinido

$$T(x) = \int_{\{a \leqslant u \leqslant x\}} f(u)\, dF(u) = S(x) + \{f(x) \cdot [F(x^+) - F(x^-)]\}, \tag{108}$$

onde a igualdade final resulta da fórmula 106') e da aditividade do integral com respeito aos intervalos de integração. Por outro lado, já sabemos que $S(x)$ é uma função de variação limitada em J e que, dado J, é de variação limitada a soma de duas funções de variação limitada. Nestes termos, só falta mostrar que é de variação limitada em J a segunda parcela do segundo membro de 108), uma propriedade decorrente da relação

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant P} | \{f(x_p) \cdot [F(x_p^+) - F(x_p^-)]\} - \{f(x_{p-1}) \cdot [F(x_{p-1}^+) - F(x_{p-1}^-)]\} | \leqslant$$

$$\leqslant \{\sup_{x \epsilon J} | f(x) | \} \cdot \{ \sum_{1 \leqslant p \leqslant P} [F(x_p^+) - F(x_p^-) + F(x_{p-1}^+) - F(x_{p-1}^-)] \} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot [\sup_{x \epsilon J} | f(x) |] \cdot [F(b) - F(a)] < + \infty .$$

Observação. A generalização do exemplo *98* a integrais de Riemann-Stieltjes N-múltiplos (com $1 < N < +\infty$), tomados em borelianos β limitados sem serem necessariamente intervalares, é muitas vezes facilitada pelo artifício de recorrer a um intervalo limitado $J \supset \beta$ e de atribuir, em seguida, o valor 0 à *função integranda* f(x) em todos os pontos $x \varepsilon J - \beta$; por outro lado, a dita generalização costuma ser notoriamente dificultada pelo problema de encontrar uma *função integrante* F(x) adequada (cujo «crescimento» com o ponto x de $N > 1$ coordenadas se revela uma noção despropositada). Eis um assunto cujo estudo encontrará melhor oportunidade por altura da teoria geral dos integrais.

§ 27 — FUNÇÕES BORELIANAS COMPLEXAS

1. Generalidades

Dados o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e o plano de Borel alargado $[\overline{X}(x), \overline{\mathcal{B}}(\overline{B})] = \dot{\times}_{1 \leqslant n \leqslant 2} [\overline{X}_n(x_n), \overline{\mathcal{B}}_n(\overline{B}_n)]$, podemos modificar a figuração geométrica habitual de $\overline{X} = \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ através dum plano de Descartes, substituindo este por um *plano de Argand:* quer dizer interpretando, por um lado, o eixo das abcissas $\overline{X}_1$ como *eixo real,* onde o ponto de abcissa 1 representa a unidade real (e positiva), e interpretando, por outro lado, o eixo das ordenadas $\overline{X}_2$ (suposto ortogonal ao outro eixo) como *eixo imaginário,* onde o ponto de ordenada 1 representa a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$. Correspondentemente, os vectores reais e planos (ou a duas dimensões) $x = (x_1, x_2) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) = \xi(\omega)$ do n.º **3** do § 24, com coordenadas x_1 (abcissa) e x_2 (ordenada), passam para *funções complexas* $x = x_1 + i \cdot x_2 = \xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega) = \xi(\omega)$, com *partes* x_1 *(a parte real)* e x_2 (a *parte imaginária*), a cada uma das quais podemos atribuir o *domínio uniforme* Ω mediante as convenções referidas a propósito das fórmulas 66) e 67). Obtemos assim funções complexas com domínio igual a Ω e com contradomínio contido no conjunto $\overline{X}$ formado por *todos os números complexos.*

Note-se que se fala em parte imaginária x_2; não devido aos valores assumidos por x_2 (que são todos reais), mas devido ao facto de $i \cdot x_2$ substituir x_2 na passagem da interpretação antiga para a nova.

Por outro lado, os números complexos admissíveis $x_1 + i \cdot x_2$ incluem *números complexos infinitos*, como $(-\infty) + i \cdot (+\infty)$, $\pi + i \cdot (-\infty)$, $(+\infty) + i \cdot \frac{1}{\pi}$, etc., e reduzem-se a *números complexos finitos* se e só se as duas partes x_1 e x_2 forem simultaneamente finitas.

Sabemos que é biunívoca e recíproca a correspondência entre números complexos $x_1 + i \cdot x_2$ e vectores (reais e) planos (x_1, x_2). Então, escolhido arbitrariamente um conjunto $\overline{M} \leqslant \overline{X}$, quer seja boreliano $\overline{B} \varepsilon \overline{B}$ quer não o seja, ele pode ser interpretado ou como conjunto formado por pontos $x = (x_1, x_2)$ ou como conjunto formado por números $x_1 + i \cdot x_2$, conduzindo em ambos os casos ao transformado inverso $\eta(\overline{M}) \leqslant \Omega$, com η a representar a inversa da função $\xi(\omega)$, esta interpretada ou como um vector plano variável com ω ou como uma função complexa da variável ω. *Em ambos os casos*, a função $\xi(\omega)$ será (por definição) *boreliana se e só se pertencer a A o transformado inverso* $\eta(\overline{B})$ *de todo o boreliano plano* $\overline{B} \varepsilon \overline{\mathcal{B}}$ ou, atendendo ao teorema 46, se e só se, escolhida ao acaso uma e só uma classe $\overline{\mathcal{G}}$ geradora de $\overline{\mathcal{B}}$, pertencer a A o transformado inverso $\eta(\overline{G})$ de qualquer $\overline{G} \varepsilon \overline{\mathcal{G}}$.

Para indagar se uma função complexa do tipo aqui referido é uma função boreliana ou se não o é, o caminho mais cómodo é frequentemente o recurso ao

Teorema 70. «Considerem-se o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(\mathrm{A})]$, o plano de Borel alargado $[\overline{X}_1(x_1), \overline{\mathcal{B}}_1(\overline{B}_1)] \dot{\times} [\overline{X}_2(x_2), \overline{\mathcal{B}}_2(\overline{B}_2)]$ e, por fim, a função complexa $\xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega)$ com domínio igual a Ω e com contradomínio contido em $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$. Então, a função dada será boreliana se e só se forem simultaneamente borelianas as suas partes real $\xi_1(\omega)$ e imaginária $\xi_2(\omega)$.»

Demonstração. Não só as definições e convenções estabelecidas equiparam a borelianidade da função $\xi_1 + i \,.\, \xi_2$ à do vector (ξ_1, ξ_2), como também a parte do teorema 57 relativa a vectores (supostos planos) torna boreliano aquele vector se e só se forem simultaneamente borelianas as funções ξ_1 e ξ_2, c. q. d.

Sabemos que, dado o número complexo $x = x_1 + i \cdot x_2$, o seu *módulo* ou *valor absoluto* ρ é definido univocamente pela relação $\rho = |x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \geqslant 0$ e, caso x não seja nulo nem infinito, a sua *amplitude não-negativa mínima* Θ é definida univocamente pela relação $0 \leqslant \Theta = \mathrm{am}(x) = \arccos \frac{x_1}{\rho} = \mathrm{arcsen} \frac{x_2}{\rho} < 2\pi$, a qual implica $x_1 = \rho \cos \Theta$, $x_2 = \rho \,\mathrm{sen}\, \Theta$ e $x/\rho = \cos \Theta + i \cdot \mathrm{sen}\, \Theta = \mathrm{cis}\, \Theta$.

Neste contexto, tem interesse o

Teorema 71. «Com os dados do teorema 70, suponha-se que a função complexa proposta é uma função boreliana $\xi(\omega)$, que $\rho(\omega)$ é o seu módulo e que $\Theta(\omega)$ é a sua amplitude não-negativa mínima, estendida a Ω mediante a convenção $\Theta(\omega) = 0$ em qualquer ponto ω onde ξ assumir um valor nulo ou infinito. Então, resultam borelianas as funções $\rho(\omega)$, $\Theta(\omega)$, $\cos[\Theta(\omega)]$, $\mathrm{sen}[\Theta(\omega)]$ e $\mathrm{cis}[\Theta(\omega)]$.»

Demonstração. Sendo $\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega)$ a função boreliana proposta, a parte da tese relativa ao módulo resulta da relação $\rho(\omega) = [\xi_1^2(\omega) + \xi_2^2(\omega)]^{1/2} \geqslant 0$, do teorema 70 e das alíneas e), f) e b) do teorema 64 (tome-se cada uma das funções ξ_1 e ξ_2 com respeito à recta de Borel alargada de ponto genérico ρ, isto sem prejuízo da respectiva borelianidade).

Visto o carácter boreliano de ρ, o transformado inverso de $\{0 < \rho < +\infty\}$ será um conjunto $A \varepsilon \mathcal{A}$. Então, as indicatrizes $I_A(\omega)$ e $I_{A^-}(\omega)$ resultam borelianas pela alínea b) do teorema 59, as funções $\tau(\omega) = \rho(\omega) \cdot I_A(\omega) + I_{A^-}(\omega)$, $\zeta_1(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot I_A(\omega) + I_{A^-}(\omega)$ e $\zeta_2(\omega) = \xi_2(\omega) \cdot I_A(\omega)$ resultam borelianas por e) e f) do teorema 64 e, por fim, as funções

$$\zeta_1(\omega)/\tau(\omega) = \cos[\Theta(\omega)] \quad \text{e} \quad \zeta_2(\omega)/\tau(\omega) = \mathrm{sen}[\Theta(\omega)] \qquad (109)$$

resultam borelianas pela alínea d) do teorema 64. Nesta conformidade, o teorema 70 prova que é boreliana a função $\mathrm{cis}[\Theta(\omega)]$; assim a nossa demonstração ficará completada se provarmos que é boreliana a função $\Theta(\omega)$.

Ora, sendo η a função inversa de ξ, os intervalos (borelianos) $B_0 = \{-\infty < x_1 < 0\} \times \{x_2 = 0\}$, $B_1 = \{-\infty < x_1 < +\infty\} \times \{0 < x_2 < +\infty\}$ e $B_2 = \{-\infty < x_1 < +\infty\} \times \{-\infty < x_2 < 0\}$ ficam com transformados inversos $\eta(B_k) = A_k \varepsilon \mathcal{A} (k = 0,1,2)$, resultando a função $\Theta(\omega)$ igual à soma de três funções: a primeira igual a 0 sobre A_0^- e igual a π sobre A_0; a segunda [ou terceira] igual a 0 sobre A_1^- [ou A_2^-]

e, sobre A_1 [ou A_2], coincidente com o ramo de arccos que é contínuo no transformado directo (via cos Θ) de A_1 [ou A_2] (transformado esse contido no intervalo aberto de extremos -1 e 1) e que assume aí valores maiores do que 0 [ou π] e menores do que π [ou 2π]. Então: a primeira função é boreliana, em virtude do teorema 48 ; a segunda [ou terceira] função é também boreliana, isso porque ela se obtém restringindo a A_1 [ou A_2] $\varepsilon \mathcal{A}$ a composição da função igual a cos $[\Theta(\omega)]$ sobre A_1 [ou A_2] e igual a $\pi/2$ [ou $3\pi/2$] sobre A_1^- [ou A_2^-] — esta boreliana pelo teorema 48 — com uma função arccos contínua no contradomínio da primeira componente, como quem diz com uma função que permite aplicar o teorema 66. Em face do exposto, a alínea f) do teorema 64 mostra que $\Theta(\omega)$ é efectivamente uma função boreliana, c. q. d.

Exemplo 99. Vale a seguinte *propriedade:* «Com os dados do teorema 70, uma função complexa definida em Ω resulta boreliana se e só se for boreliana a sua conjugada.» — Com efeito: como a conjugada da conjugada é a função original, basta provar que a borelianidade da função $\xi = \xi_1 + i \cdot \xi_2$ implica a borelianidade da sua conjugada $\overline{\xi} = \xi_1 + i \cdot (-\xi_2)$. É o que sucede efectivamente, em virtude do teorema 70 e do lema 62_1 ou de f) do teorema 64.

Exemplo 100. Vale a seguinte *propriedade:* «Com os dados do teorema 70, resulta boreliana qualquer função complexa definida em Ω e degenerada aí em constante.» — Com efeito, uma função do tipo referido tem partes (real e imaginária) que são ambas constantes, logo borelianas (por a) do teorema 59). Assim o teorema 70 prova a afirmação feita.

2. **Alguns casos importantes de transmissão do carácter boreliano**

Se quisermos estudar os eventuais limites de funções borelianas complexas, então torna-se útil o

Teorema 72. «Dados o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e o plano de Borel alargado $[\overline{X}_1(x_1), \overline{\mathcal{B}}_1(\overline{B}_1)] \dot{\times} [\overline{X}_2(x_2), \overline{\mathcal{B}}_2(\overline{B}_2)]$, considere-se a sucessão formada pelas funções borelianas complexas $\xi_p(\omega)$ $(p = 1,2,3, \ldots)$, todas com contradomínio contido em $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$, e designe-se por K o conjunto dos pontos ω para os quais a sucessão tem limite. Então, não só $K \varepsilon A$, como também será boreliana a função $\xi(\omega)$ que é igual a 0 em todos os pontos $\omega \varepsilon K^-$ e que é igual a $\lim_{p \to +\infty} \xi_p(\omega)$ em todos os pontos $\omega \varepsilon K$.»

Demonstração. Caso K seja vazio, $\xi(\omega)$ dá a constante 0, tomada em Ω, e a propriedade do exemplo 100 prova a borelianidade de ξ. Por isso, podemos supor que K é não-vazio.

Podemos pôr $K = K_1 \wedge K_2$, onde $K_1 \leqslant \Omega$ [ou $K_2 \leqslant \Omega$] refere o conjunto dos pontos ω em que as partes reais $\xi_{1,p}(\omega)$ [ou imaginárias $\xi_{2,p}(\omega)$] das funções borelianas $\xi_p(\omega)$ (partes essas também borelianas pelo teorema 70) admitem limite (ou finito ou igual a $\pm \infty$). Viu-se, no exemplo 92, que K_1 e K_2 são ambos mensuráveis e concluímos assim pela *mensurabilidade de* K.

Posto isso, as propriedade dos limites de sucessões complexas mostram que vale(em Ω) a relação

$$\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega) = [\lim_{p \to +\infty} \zeta_{1,p}(\omega)] + i \cdot [\lim_{p \to +\infty} \zeta_{2,p}(\omega)] =$$
$$= \lim_{p \to +\infty} \zeta_p(\omega),$$

onde cada um dos símbolos ζ com índices designa a função que é igual ao correspondente ξ nos pontos $\omega \varepsilon K$ e que é igual a 0 em todos os pontos $\omega \varepsilon K^-$. Como as funções $\zeta_{1,p}$ e $\zeta_{2,p}$ ($p = 1,2,3, \ldots$) são todas borelianas, em virtude do teorema 48, o corolário 63" e o teorema 70 impõem a borelianidade da função $\xi(\omega)$, c. q. d.

A extensão do teorema 64 a funções complexas não faz sentido no caso da alínea c), além de já ter sido efectuada no caso da alínea a) (veja-se o teorema 71). Neste contexto, temos o

Teorema 73. «Dados os espaços mensuráveis do teorema 72, resulta boreliana qualquer função complexa, definida em Ω e com contradomínio contido em $\overline{X_1} \times \overline{X_2}$, que seja:

a) a combinação linear e determinada dum número finito de funções borelianas complexas;

b) o produto determinado dum número finito de funções borelianas complexas;

c) o cociente determinado com dividendo e divisor iguais a funções borelianas complexas;

d) a potência principal com expoente constante, finito e nulo ou positivo, quando a respectiva base for uma função boreliana complexa.»

Demonstração. Atendendo à associatividade das operações abrangidas por a) e b), quando determinadas e em número finito, não perdemos em generalidade se considerarmos no máximo duas funções borelianas complexas, digamos

$$\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega) \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}(\omega) = \tilde{\xi}_1(\omega) + i \cdot \tilde{\xi}_2(\omega).$$

a) Sendo $c = c_1 + i \cdot c_2$ e $\tilde{c} = \tilde{c}_1 + i \cdot \tilde{c}_2$ duas constantes complexas, a propriedade decorre de

$$c\xi + \tilde{c}\tilde{\xi} = (c_1\xi_1 - c_2\xi_2 + \tilde{c}_1\tilde{\xi}_1 - \tilde{c}_2\tilde{\xi}_2) + i \cdot (c_1\xi_2 + c_2\xi_1 + \tilde{c}_1\tilde{\xi}_2 + \tilde{c}_2\tilde{\xi}_1),$$

do teorema 70 e da alínea f) do teorema 64.

b) A propriedade decorre de

$$\xi \cdot \tilde{\xi} = (\xi_1\tilde{\xi}_1 - \xi_2\tilde{\xi}_2) + i \cdot (\xi_1\tilde{\xi}_2 + \xi_2\tilde{\xi}_1),$$

do teorema 70 e de e) e f) do teorema 64.

c) A propriedade decorre de

$$\xi/\tilde{\xi} = [(\xi_1\tilde{\xi}_1 + \xi_2\tilde{\xi}_2)/(\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2)] + i \cdot [(-\xi_1\tilde{\xi}_2 + \xi_2\tilde{\xi}_1)/(\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2)],$$

do teorema 70 e de d), e) e f) do teorema 64.

d) Designados por α o expoente e por $\xi(\omega)$ a base, podemos definir a *potência principal* do enunciado como sendo a função, definida em Ω, que é dada pela relação

$$\xi^\alpha(\omega) = \rho^\alpha(\omega) \cdot \text{cis}\,[\alpha \cdot \Theta(\omega)], \tag{110}$$

onde, por um lado, $\rho^\alpha(\omega)$ representa a *potência não-negativa* (e também principal) com expoente α e com base boreliana $\rho(\omega) = |\xi(\omega)|$ e onde, por outro lado, $\Theta(\omega)$ representa a *amplitude boreliana* referida no enunciado do teorema 71. Pondo de lado o caso imediato $\alpha = 0$, a alínea f) do teorema 64 institui $\alpha \cdot \Theta(\omega)$

em função boreliana real, cujo contradomínio E está contido no intervalo principal de extremos 0 e $2\alpha\pi$. Como o coseno e o seno são funções contínuas em E, concluímos, via teorema 66, que são borelianas reais as funções cos $[\alpha \cdot \Theta(\omega)]$ e sen $[\alpha \cdot \Theta(\omega)]$. Então, a função $\xi^{\alpha}(\omega)$, dada por 110), será uma função boreliana, em virtude do teorema 70 e das alíneas b) dos teoremas 64 e 73, c. q. d.

Observação. Na justificação da alínea b) do teorema 73 convém evitar indeterminações da multiplicação, por exemplo $[(+\infty) + i \cdot (+\infty)]^2$, ao contrário do que sucede com a multiplicação homóloga de e) do teorema 64 (convenção $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) . 0 = 0$). Todavia, a situação pode ser melhorada por recurso aos módulos e às amplitudes referidos no enunciado do teorema 71.

Exercício 99. Mostre que o teorema 65 permanece válido quando se trabalha com um plano de Borel alargado e com termos borelianos complexos e finitos.

Exercício 100. O que se passa com as alíneas a) e c) do teorema 73 se suprimirmos a exigência de determinação e se, em contrapartida, atribuirmos o valor 0 em todos os pontos $\omega \varepsilon D^-$, com D igual à parte de Ω onde houver determinação?

3. Borelianidade, continuidade e composição

Para funções complexas de variáveis complexas há continuidade (em sentido lato) num domínio se e só se houver continuidade (em sentido lato) em cada ponto desse domínio e, além disso, há continuidade (em sentido lato) num ponto se e só se o valor da função nesse ponto for igual ao respectivo limite, este um número da forma $\alpha + i \cdot \beta$, com $-\infty \leqslant \alpha, \beta \leqslant +\infty$. Neste contexto, apresentamos o

Teorema 74. «Dados o espaço mensurável $[\Omega(\omega), A(A)]$, o plano de Borel alargado $[\overline{X}_1(x_1), \overline{B}_1(\overline{B}_1)] \dot{\times} [\overline{X}_2(x_2), \overline{B}_2(\overline{B}_2)]$ e outro plano de Borel alargado $[\overline{Y}_1(y_1), \overline{C}_1(\overline{C}_1)] \dot{\times} [\overline{Y}_2(y_2), \overline{C}_2(\overline{C}_2)]$, considere-se uma função boreliana complexa $x_1 + i \cdot x_2 = \xi_1(\omega) + i \cdot \xi_2(\omega)$, com contradomínio igual a $E \leqslant \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$, e admita-se que $y_1 + i \cdot y_2 = f_1(x_1, x_2) + i \cdot f_2(x_1, x_2)$ é uma função complexa e contínua (em sentido lato), com domínio igual a E e com contradomínio contido em $\overline{Y}_1 \times \overline{Y}_2$. Então, a composição $f_1(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) + i \cdot f_2(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ resulta uma função boreliana complexa com respeito a $(\overline{Y}_1, \overline{C}_1) \dot{\times} (\overline{Y}_2, \overline{C}_2)$. Em estilo mais abreviado e menos preciso: É boreliana qualquer função complexa e contínua que seja tomada nalguma função boreliana complexa.»

Demonstração. Por um lado, as propriedades das funções complexas de variáveis complexas ensinam que a função $y_1 + i \cdot y_2$ é contínua (em sentido lato) sobre $E \leqslant \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ se e só se for aí contínua (em sentido lato) cada uma das partes $f_1(x_1,x_2)$ e $f_2(x_1,x_2)$; por outro lado, tiramos do n.º 1, ou talvez melhor dos teoremas 70 e 57, que $x_1 + i \cdot x_2$ é uma função boreliana complexa com contradomínio E se e só se $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ for um vector boreliano com contradomínio E. Logo a hipótese de continuidade referida no enunciado faz com que primeiro o teorema 66 torne borelianas as duas composições $f_1(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ e $f_2(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ e, em seguida, o teorema 70 justifique a nossa tese.

Exemplo 101. Vale a seguinte *propriedade:* «Dados os planos de Borel alargados do teorema 74 e escolhido arbitrariamente um *boreliano* não-vazio $\overline{\beta} \leqslant \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$, resulta boreliana qualquer função complexa da variável complexa $x = x_1 + i \cdot x_2$ que tenha contradomínio contido em $\overline{Y}_1 \times \overline{Y}_2$, que seja contínua (em sentido lato) sobre $\overline{\beta}$ e que tome o valor 0 em qualquer ponto $x \varepsilon \overline{\beta}^-$.» — Com efeito, sendo $y_1 + i \cdot y_2 = f_1(x_1, x_2) + i \cdot f_2(x_1, x_2)$ uma função sujeita às hipóteses do enunciado, cada uma das partes f_1 e f_2 resulta contínua (em sentido lato) sobre $\overline{\beta}$ e toma o valor 0 em qualquer ponto $x \varepsilon \overline{\beta}^-$. Então, a propriedade do exemplo 96 torna borelianas as duas partes referidas, pelo que o teorema 70 justifica a nossa tese.

Exemplo 102. Vale a seguinte *propriedade:* «Dada uma função complexa de variáveis complexas em número finito que seja boreliana, quando se parte do espaço de Borel alargado correspondente a essas variáveis, então resulta boreliana a composição proveniente da substituição das ditas variáveis complexas por outras tantas funções borelianas complexas que sejam todas elas tomadas num espaço mensurável comum.» — Com efeito, seja $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ o espaço mensurável comum referido, sejam $x_m = x_{m,1} + i \cdot x_{m,2}$ $(m = 1,2, \ldots, M < +\infty)$ as variáveis que se substituem pelas funções borelianas digamos

$$\xi_m(\omega) = \xi_{m,1}(\omega) + i \cdot \xi_{m,2}(\omega)$$

e seja

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_M) = y = y_1 + i \cdot y_2 = f_1(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{M,2}) +$$

$$+ i \cdot f_2(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{M,2})$$

a função dada, por hipótese boreliana quando se parte do espaço de Borel alargado $(\overline{X}, \overline{B})$ a 2M dimensões que corresponde às variáveis reais $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{M,2}$. Então, f_1 e f_2 são duas funções reais, definidas em

$$\overline{X} = (\overline{X}_{1,1} \times \overline{X}_{1,2}) \times (\overline{X}_{2,1} \times \overline{X}_{2,2}) \times \ldots \times (\overline{X}_{M,1} \times \overline{X}_{M,2}),$$

que resultam ambas borelianas em virtude do teorema 70 (devidamente adaptado). Sendo ξ o vector de coordenadas $\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \ldots, \xi_{M,2}$, estas resultam borelianas graças ao teorema 70, donde concluímos, atendendo ao teorema 57, que o próprio vector ξ resulta boreliano. Então, o corolário 47' torna borelianas as composições $f_n(\xi(\omega))$ $(n = 1,2)$, pelo que resulta boreliana a função complexa

$$f_1(\xi(\omega)) + i \cdot f_2(\xi(\omega)) = f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_M(\omega)).$$

Fica assim provada a propriedade acima enunciada. — Caso a nossa função *seja contínua* (em sentido lato) *sobre o boreliano não-vazio* $\overline{\beta} \leqslant \overline{X}$ *e assuma o valor* 0 *em qualquer ponto* $x \varepsilon \overline{\beta}^-$, este comportamento transmite-se a cada uma das partes f_1 e f_2, que resultam assim borelianas em virtude da propriedade do exemplo 96. Não havendo mais alterações, a dedução pode prosseguir nos mesmos moldes do caso geral supracitado e a composição final não deixa de ficar boreliana. — Outra hipótese é a de f ser uma *função contínua* (em sentido lato) *sobre o contradomínio* E do vector boreliano ξ, situação essa que se transmite a cada uma das partes f_1 e f_2. Então, o teorema 66 torna borelianas as duas composições $f_n(\xi(\omega))$ e, portanto, o teorema 70 impõe a borelianidade da função complexa $f_1(\xi(\omega)) + i \cdot f_2(\xi(\omega))$.

Observação. Recorreu-se ao corolário 47' na parte final da justificação da propriedade do exemplo 102. Todavia, o recurso ao teorema 47 permite substituir o pedido de borelianidade para $f(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ por outro pedido mais suave, cuja formulação exacta deixamos entregue ao cuidado do leitor.

Exercício 101. Dado um círculo aberto e não-vazio γ (contido no plano de Argand) e dada uma função complexa de variável complexa $y = f(x)$ que seja *holomorfa* (quer dizer derivável) sobre γ, mostre que, seja qual for o número finito e inteiro $k \geqslant 0$, existe e é boreliana complexa a função que assume o valor 0 nos pontos $x\varepsilon\gamma^-$ e que sobre γ coincide com a derivada $y^{(k)}$.

Exercício 102. Dado um conjunto aberto e não-vazio γ, contido no plano de Argand e limitado por um contorno fechado e *quase-liso* †, suponha que $y = f(x)$ é uma função (complexa de variável complexa e) holomorfa sobre γ. Nesta conformidade, mostre que existe e é boreliana complexa a função que assume o valor 0 nos pontos $x\varepsilon\gamma^-$ e que sobre γ coincide com o «integral indefinido» de y ao longo dum contorno quase-liso, arbitrário desde que contido em γ, emergente dum ponto fixo e terminando no ponto genérico $x\varepsilon\gamma$.

4. **Considerações finais**

Fechamos este parágrafo com uma breve referência a uma questão que foi silenciada até agora e que está subjacente a partes muito consideráveis do estudo feito neste capítulo e nos §§ 14 e 20.

Dados os espaços de Borel alargados $[\overline{X}(x), \overline{B}(\overline{B})]$ e $[\overline{Y}(y), \overline{C}(\overline{C})]$, vimos, no n.º **2** do § 22, que a função de ligação $y = f(x)$, com domínio $\overline{D}\varepsilon\overline{B}$ e com contradomínio contido em $\overline{Y}$,

† Veja a nota ao exemplo 25.

se diz mensurável se e só se a sua inversa g na acepção da fórmula 70) satisfizer à relação $g(\overline{C}) \varepsilon \overline{B}$ para qualquer $\overline{C} \varepsilon \overline{C}$.

Nesta conformidade, *todas* as funções $y = f(x)$ seriam mensuráveis se porventura *todo* o conjunto contido em $\overline{X}$ fosse um boreliano $\overline{B}$, incidência essa que tornaria completamente supérfluas as numerosas deduções atrás feitas, em que se justificou ou o carácter boreliano de certos conjuntos contidos num espaço real (alargado) ou o carácter mensurável de certas funções de ligação do tipo supracitado. Isto para não falar na pouca credibilidade duma situação em que conjuntos e funções *absolutamente arbitrários* (adentro do quadro traçado) ficariam dotados de estruturas surpreendentemente aperfeiçoadas.

Retomando o primeiro dos espaços de Borel dados e supondo-o multidimensional, podemos pôr $(\overline{X},\overline{B}) = \dot{\times}_{t \epsilon T} (\overline{X}_t,\overline{B}_t)$, onde cada factor é uma recta de Borel alargada. Se qualquer conjunto contido em $\overline{X}$ fosse um boreliano $\overline{B}$, então, escolhidos arbitrariamente uma determinação de t e um conjunto não-vazio $\overline{C}_t \leqslant \overline{X}_t$, o resultado 42b) faria com que pertencesse a $\overline{B}$ o cilindro contido em $\overline{X}$ e com base $\overline{C}_t$. Daí e do corolário 37' concluíamos pela igualdade entre $\overline{B}_t$ e a álgebra-σ máxima tirada de $\overline{X}_t$. Portanto, sendo (X_t,B_t) a recta de Borel correspondente a $(\overline{X}_t,\overline{B}_t)$, o corolário 21' provaria a igualdade entre B_t e a álgebra-σ máxima tirada de X_t. Consequentemente, se L_t fosse alguma sobreclasse de B_t, ela não poderia deixar de fora nenhum conjunto contido em X_t.

Em face do exposto, reconhecemos que a situação «insólita» supracitada se torna impossível caso consigamos provar o seguinte: escolhida arbitrariamente uma recta de Borel vulgar (X,B), existem uma classe $L \geqslant B$ e um conjunto $K \leqslant X$ tais que $K \varepsilon L^-$.

Esta prova pode efectuar-se, mas convém adiá-la para uma fase posterior do nosso estudo, onde ela tenha melhor oportunidade de cabimento.

Feita essa prova, podemos partir do espaço de Borel vulgar $(X,B) = \dot{\times}_{t \epsilon T} (X_t,B_t)$ e, em seguida, podemos transcrever a dedução acima feita, pondo X, B, C_t, X_t, B e B_t em lugar de $\overline{X}$, $\overline{B}$, $\overline{C}_t$, $\overline{X}_t$, $\overline{B}$ e $\overline{B}_t$, para concluirmos que a situação «insólita», devidamente transcrita, conduziria à identificação absurda entre cada B_t e a correspondente álgebra-σ máxima tirada de X_t.

ASH, R. B. — *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York, 1972.

BAIRE, R. — *Leçons sur les fonctions discontinues*. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

BAUER, H. — *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie*. De Gruyter, Berlin, 1974.

BRAUMANN, P. B. T. — *Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes*. Editorial Império, Lisboa, 1958.

Elementos da Teoria da Medida com relevo para a Teoria da Probabilidade, Parte A, Fasc. 1.º e 2.º Tipografia Planalto, Huambo, 1969.

Uso de indicatrizes na Algebra de Conjuntos destinada à Teoria da Medida e da Probabilidade. Centro de Estatística e Aplicações, Lisboa I.N.I.C., 1980.

BURKILL, J. C. — *The Lebesgue Integral*. Cambridge University Press, 1965.

CARATHÉODORY, C. — *Entwurf einer Algebraisierung des Integralbegriffs*. Sitzungsber. Math.-Naturwiss. Klasse Bayer. Akad. Wiss., München, 1938, p. 24-28.

Algebraic theory of measure and integration. Chelsea, New York, 1963.

CHOW, Y. S., and TEICHER, H. — *Probability Theory*. Springer-Verlag, New York, 1978.

COLWELL, P., and MATHEWS, J. C. — *Introducción a las variables complejas*. Editorial Trillas, México, 1976.

COURANT, R., and JOHN, F. — *Introduction to Calculus and Analysis, Vol.* 1 *and Vol.* 2. John Wiley and Sons, New York, 1965 and 1974.

CRAMÉR, H. — *Random variables and probability distributions*. Cambridge University Press, 1937.

Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, 1946.

DIONÍSIO, J. J. — *Fundamentos da Teoria da Medida*. Revista Fac. Ciências Coimbra, Vol. 25, 1956.

FELLER, W. — *Probability Theory and its Applications, Vol.* 1. John Wiley and Sons, New York, 1952.

GNEDENKO, B. W. — *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Akademie-Verlag, Berlin, 1957.

GOURSAT, E. — *Cours d'Analyse*. Gauthier-Villars, Paris, 1949.

HAHN, H., and ROSENTHAL, A. — *Set Functions*. University of New Mexico Press, Albuquerque, 1948.

HALMOS, P. R. — *Measurable transformations*. Bull. A.M.S. *54* (1948), 416-421.

Naive Set Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Measure Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

HAUSDORFF, F. — *Set Theory*. Chelsea, New York, 1962.

JACOBS, K. — *Measure and Integral*. Academic Press, New York, 1978.

JOHN, F. — Veja-se COURANT, R.

KAMKE, E. — *Mengenlehre*. De Gruyter, Berlin, 1969.

KOLMOGOROV, A. N. — *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea, New York, 1956.

LAHA, R. G., and ROHATGI, V. K. — *Probability Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1979.

LEBESGUE, H. — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

LOÈVE, M. — *Probability Theory*. Van Nostrand-Reinhold, Princeton, 1963.

MATHEWS, J. C. — Veja-se COLWELL, P.

OSTROWSKI, A. — *Lições de Cálculo Diferencial e Integral, Volumes* I *a* III. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1967 a 1971.

RÉNYI, A. — *Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. I, n.º 1, 1964, p. 3-19.

Calcul des Probabilités. Dunod, Paris, 1966.

Foundations of Probability. Holden-Day, San Francisco, 1970.

RICHTER, H. — *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1956.

ROHATGI, V. K. — Veja-se LAHA, R. G.

ROSENTHAL, A. — Veja-se HAHN, H.

ROYDEN, H. L. — *Real Analysis.* Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.

SANSONE, G. — Veja-se VITALI, G.

TEICHER, H. — Veja-se CHOW, Y. S.

TITCHMARSH, E. C. — *The Theory of Funtions.* Oxford University Press, 1944.

VALIRON, G. — *Théorie des Fonctions.* Masson et C.ie, Éditeurs, Paris, 1948.

VALLÉE POUSSIN, C. J. de La — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire.* Paris, 1934.

VITALI, G., e SANSONE, G. — *Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale, Parte* I *e Parte* II. Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1943 e 1946.

ZAANEN, A. C. — *Integration.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

ÍNDICE REMISSIVO

Letra F

Letra G

Letra H

Letra I

Letra L

Letra M Pág.

Letra N

Letra O

Letra R

Letra U

Letra V

CAPÍTULO II

Operações a incidir sobre classes

SECÇÃO A

Operações internas

SECÇÃO B

Operações externas

Pág.

SECÇÃO B

Estudo específico das funções borelianas

Esta edição de ÁLGEBRA DE CONJUNTOS, do Prof. Doutor Pedro Bruno Teodoro Braumann, foi composta, impressa e brochada para a *Fundação Calouste Gulbenkian*, nas oficinas da Sociedade Tipográfica, Lda., Lisboa.
Tiragem é de 6000 exemplares.
Abril 1987